Université Claude Bernard – Lyon 1 — **Semestre d'Automne 2025–2026**

Cursus préparatoire : première année — **05 novembre 2025**

Correction de DS n° 2

Exercice 1 — Logique et ensembles (5 points)

a) (**1,5**) Traductions.

i) « Tout entier pair est divisible par 3» : $\forall n \in \mathbb{Z},\ (\exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k) \Rightarrow (\exists \ell \in \mathbb{Z},\ n = 3\ell)$.

ii) « Il existe un entier impair dont le carré est pair » :
$\exists n \in \mathbb{Z},\ (\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1)$ et $(\exists \ell \in \mathbb{Z}, n^2 = 2\ell)$.

iii) « Si un réel est positif, alors son carré est positif » : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geq 0) \Rightarrow (x^2 \geq 0)$.

b) (**1,5**)Traduction en français des trois propositions :

1. $P(x) \Rightarrow Q(x)$: "Si x est pair, alors x est divisible par 4."
2. $\neg P(x) \vee Q(x)$: "x n'est pas pair ou bien x est divisible par 4."
3. $\exists x \in \mathbb{N},\ P(x) \wedge \neg Q(x)$: "Il existe un entier naturel x qui est pair mais non divisible par 4."

c)(**2.0**) **Contraposée et négation.**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x > 1 \Rightarrow x^2 > 1.$$

Contraposée : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 1$.
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$ *et* $x^2 \leq 1$.

Exercice 2 — Applications et relations (5 points)

a) (**0,5**) $f \circ g(x) = f(2x+3) = (2x+3)^2 - 1 = 4x^2 + 12x + 8$.
$g \circ f(x) = g(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 3 = 2x^2 + 1$.

b) (**0,5**) Elles ne sont pas égales : par exemple, $4x^2 + 12x + 8 \neq 2x^2 + 1$ pour $x = 0$.

c) (**1.0**) f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ (car $f(x) = f(-x)$), et n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ car $f(x) = x^2 - 1 \geq -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a)(**1,5**) **Relation R sur $\mathbb{Z}$:** $xRy \iff 3 \mid (x - y)$.

— *Réflexive :* $3 \mid (x - x) = 0$.

— *Symétrique :* si $3 \mid (x - y)$, alors $3 \mid (y - x)$.

— *Transitive :* si $3 \mid (x - y)$ et $3 \mid (y - z)$, alors il existe des entiers k et ℓ tels que $x - y = 3k$ et $y - z = 3\ell$. Il s'en suit que

$$x - z = (x - y) + (y - z) = 3k + 3\ell = 3(k + \ell),$$

d'où $3 \mid (x - z)$.

Ainsi R est une équivalence.

b)(**1,5**) Les classes sont :

$$[0] = 3\mathbb{Z} = \{3k :\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad [1] = 3\mathbb{Z} + 1 = \{3k + 1 :\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad [2] = 3\mathbb{Z} + 2 = \{3k + 2 :\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 3 — Ordres et réels (4 points)

1. (**1.0**) On définit $x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.
   - *Réflexivité* : $x - x = 0 \in \mathbb{R}_+$.
   - *Antisymétrie* : si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $y - x \geq 0$ et $x - y \geq 0$, donc $x = y$.
   - *Transitivité* : si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$ car $(z - x) = (z - y) + (y - x) \geq 0$.
   - *Totalité* : pour $x, y \in \mathbb{R}$, soit $y - x \geq 0$ (alors $x \leq y$), soit $x - y \geq 0$ (alors $y \leq x$).

   Ainsi, $\leq$ est un ordre total.
2. (**3,0**) On a $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
   (a) E est majoré par $\sqrt{2}$ (et aussi par tout $M \geq \sqrt{2}$).
   (b) E n'a pas de maximum car tout $M \in E$ est majoré strictement par $M' \in]M, \sqrt{2}[\subset E$.
   (c) $\sup E = \sqrt{2}$: (i) c'est un majorant par (a) ; (ii) E n'admet pas de majorant plus petit par (b).

Exercice 4 — Suites réelles (6 points)

a) Soit (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 2).$$

i) (**0,5**) Calculons les premiers termes :

$$u_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, \qquad u_2 = \frac{\frac{3}{2}+2}{2} = \frac{7}{4}, \qquad u_3 = \frac{\frac{7}{4}+2}{2} = \frac{15}{8}.$$

ii) (**0,5**) Supposons que (u_n) converge vers une limite ℓ. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient

$$\ell = \frac{\ell + 2}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2\ell = \ell + 2 \quad \Longrightarrow \quad \ell = 2.$$

iii) (**1,0**) Montrons que (u_n) est croissante et majorée.

— Comme $1 < 3/2$, on a $u_0 < u_1$. Hérédité : si $u_n \leq u_{n+1}$, alors

$$u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2 \Longrightarrow \frac{1}{2}(u_n + 2) \leq \frac{1}{2}(u_{n+1} + 2) \Longrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

Ainsi (u_n) est croissante.

— Si $u_n \leq 2$, alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2} \leq \frac{2+2}{2} = 2,$$

donc (u_n) est majorée par 2 (par récurrence, puisque $u_0 = 1 \leq 2$).

Comme (u_n) est croissante et majorée, elle est convergente, et sa limite vaut $\ell = 2$.

iv) (**1,0**) Déterminons une formule explicite. Posons $v_n = u_n - 2$. Alors $v_0 = u_0 - 2 = -1$, et

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{2} = \frac{v_n}{2}.$$

Par récurrence on obtient $v_n = v_0/2^n = -1/2^n$. On en déduit $v_n = -\frac{1}{2^n}$, donc

$$\boxed{u_n = v_n + 2 = 2 - \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N}).}$$

On vérifie bien que (u_n) est croissante et converge vers 2.

b) $v_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$.

i) (**1,0**) La suite n'est pas convergente, car les sous-suites paires et impaires ont des limites distinctes :

$$v_{2m} = 1 + \frac{1}{2m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1, \qquad v_{2m+1} = -1 + \frac{1}{2m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} -1.$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sup_{k\geq n} v_k, \qquad w_n = \inf_{k\geq n} v_k.$$

ii) (**2,0**) On observe que, pour k pair, $v_k = 1+\dfrac{1}{k}$ est strictement décroissante vers 1, et pour k impair, $v_k = -1+\dfrac{1}{k}$ est strictement croissante vers -1. De plus, pour tout k, $v_{2k} > v_{2k+1}$. Il s'ensuit que le supremum (resp. l'infimum) sur la “queue” $\{k \geq n\}$ est toujours atteint par le *premier* indice pair (resp. impair) $\geq n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1 + \dfrac{1}{n+1}, & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 1}.$$

De même,

$$w_n = \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{n+1}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 + \dfrac{1}{n}, & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty} w_n = -1}.$$

Ces limites coïncident bien avec $\limsup v_n = 1$ et $\liminf v_n = -1$.