Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2025–2026

Algèbre 1 et Analyse 1

Devoir surveillé 1

LE 1ER OCTOBRE 2025 – 1H30

Toutes les réponses doivent être justifiées. La qualité de la rédaction tiendra une part importante dans l'appréciation des copies. Les calculatrices et notes de cours sont interdites.

Exercice 1.

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.
3. Justifier l'existence et calculer la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2+\cos(1+e^x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{x^2+1})}{-x^2+3x+6}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{i}{j}.$$

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la proposition suivante :

$$P_n : \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geq \sum_{0\leq k\leq n} \frac{x^k}{k!},$$

et on note f_n la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = e^x - \sum_{0\leq k\leq n} \frac{x^k}{k!}.$$

1. Calculer f_1', f_2', f_3', puis f_n' pour tout $n \geq 1$.
2. Prouver par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 4. Soit la fonction $f : x \to \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition maximal de f.
2. Établir un tableau de variations pour f et esquisser le graphe de f.