
Correction du devoir surveillé 1

1er octobre 2025 – 1h30

Exercice 1.

1. **Déterminer** $a, b \in \mathbb{R}$ **tels que pour tout** $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2}$.

On part de l'expression proposée et on réduit au même dénominateur :

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} = \frac{a(k+2)+bk}{k(k+2)} = \frac{(a+b)k+2a}{k(k+2)}.$$

On arrive donc à

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \quad \frac{1}{k(k+2)} = \frac{(a+b)k+2a}{k(k+2)}.$$

Pour tous réels x, y avec $y \neq 0$, si $x/y = 0$, alors $x = 0$. Donc on a

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \quad (a+b)k + 2a - 1 = 0. \tag{1}$$

Le polynôme $(a+b)X + 2a - 1$ en la variable X est de degré 1 et s'annule en tous les entiers $k \neq 0$. C'est donc le polynôme nul. C'est-à-dire qu'on obtient le système

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ 2a - 1 = 0, \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(a, b) = (1/2, -1/2)$. Conclusion : $a = 1/2$ et $b = -1/2$.

---

2. **Pour** $n \in \mathbb{N}^*$, **simplifier l'expression** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

Par la question 1,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+2)} \right),$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}.$$

On peut réindexer la deuxième somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}$$

et presque tous les termes se simplifient dans le membre de droite : il ne reste plus que les deux premiers termes de la première somme dans le membre de droite, et les deux derniers termes de la deuxième somme. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

---

3. **Justifier l'existence et calculer la valeur de la limite** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

La suite $\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Donc d'après la question précédente, la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et tend vers $\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2+\cos(1+e^x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{x^2+1})}{-x^2+3x+6}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{i}{j}.$$

Première limite. Pour tout $y \in \mathbb{R}, \cos(y) \leq 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2 + \cos(1+e^x) \leq 3$, si bien que

$$\frac{x}{2+\cos(1+e^x)} \geq \frac{x}{3}.$$

Comme la fonction minorante tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, on en déduit que la limite cherchée est $+\infty$. (La division par $2+\cos(1+e^x)$ est licite du fait de la minoration $\forall\, y \in \mathbb{R}, \cos(y) \geq -1$, qui implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2+\cos(1+e^x) \geq 1$.)

Deuxième limite. On factorise par e^{x^2} à l'intérieur du logarithme :

$$\ln(1+e^{x^2+1}) = \ln(e^{x^2}(e+e^{-x^2})) = x^2 + \ln(e+e^{-x^2}).$$

Donc, pour x assez grand (de sorte que, sans faire de calcul, on sait que $-x^2+3x+6$ ne s'annule pas),

$$\frac{\ln(1+e^{x^2+1})}{-x^2+3x+6} = \frac{x^2}{-x^2+3x+6} + \frac{\ln(e+e^{-x^2})}{-x^2+3x+6}.$$

On a directement

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x^2+3x+6} = -1,$$

en considérant les coefficients dominants. Par ailleurs, par propriété de l'exponentielle et du logarithme,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(e+e^{-x^2}) = 1.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e+e^{-x^2})}{-x^2+3x+6} = 0,$$

si bien que la limite cherchée vaut -1.

Troisième limite. On commence par calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{i}{j}$. On observe que la domaine de sommation est

$$\left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2, \quad 2\leq j\leq n, \quad 1\leq i\leq j-1\right\}.$$

Ici il peut être utile de faire un dessin d'un quadrillage dans le quart de plan $\mathbb{N}^2\subseteq\mathbb{R}^2$. Donc

$$S_n = \sum_{2\leq j\leq n} \frac{1}{j} \sum_{1\leq i\leq j-1} i,$$

et d'après le cours

$$\sum_{1\leq i\leq j-1} i = \frac{j(j-1)}{2},$$

si bien que

$$S_n = \sum_{2\leq j\leq n} \frac{1}{j}\cdot\frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{2\leq j\leq n}(j-1) = \frac{1}{2}\sum_{1\leq j\leq n-1} j = \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2}.$$

Finalement,

$$\frac{S_n}{n^2} = \frac{n(n-1)}{4n^2}$$

tend vers $1/4$ quand $n\to+\infty$.

<u>Exercice 3.</u> Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note P_n la proposition suivante :

$$P_n : \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}_+, \quad e^x \geq \sum_{0\leq k\leq n} \frac{x^k}{k!},$$

et on note f_n la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = e^x - \sum_{0\leq k\leq n} \frac{x^k}{k!}.$$

1. **Calculer f_1', f_2', f_3', puis f_n' pour tout $n\geq 1$.**

D'après l'énoncé, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_1(x) = e^x-(1+x)$. Donc $f_1'(x) = e^x-1 = f_0(x)$. De même, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_2(x) = e^x-(1+x+x^2/2)$. Donc $f_2'(x) = e^x-1-x = f_1(x)$. Puis, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_3(x) = e^x-(1+x+x^2/2+x^3/6)$, et donc $f_3'(x) = e^x-1-x-x^2/2 = f_2(x)$.

Prouvons par récurrence sur n que $f_n' = f_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. L'initialisation est vraie par ce qui précède. Supposons que pour un certain $n \geq 1$, on ait $f_n' = f_{n-1}$. Alors on observe que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

Le polynôme $x \to \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ a pour dérivée $x \to \dfrac{(n+1)x^n}{(n+1)!} = \dfrac{x^n}{n!}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{n+1}'(x) = f_n'(x) + \frac{x^n}{n!},$$

et par l'hypothèse de récurrence

$$f_{n+1}'(x) = f_{n-1}(x) + \frac{x^n}{n!} = f_n(x),$$

ce qui achève la récurrence.

---

2. **Prouver par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.**

Initialisation : on cherche à prouver P_1. Cela revient à prouver $f_1 \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f_1' = f_0$, et que par propriété de l'exponentielle $f_0' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f_1 est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, $f_1(0) = 0$. Donc $f_1 \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et P_1 est vraie.

Hypothèse de récurrence : on suppose que pour un certain $n \geq 1$, la propriété P_n est vraie.

On considère maintenant P_{n+1}. Montrer que P_{n+1} est vraie, c'est prouver que f_{n+1} est positive sur $\mathbb{R}_+$. On utilise le fait que $f_{n+1}' = f_n$, prouvé à la question précédente. Par hypothèse de récurrence, P_n est vraie, et donc f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$. Donc f_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Mais $f_{n+1}(0) = 0$, donc f_{n+1} est positive sur $\mathbb{R}_+$, ce qui achève la récurrence.

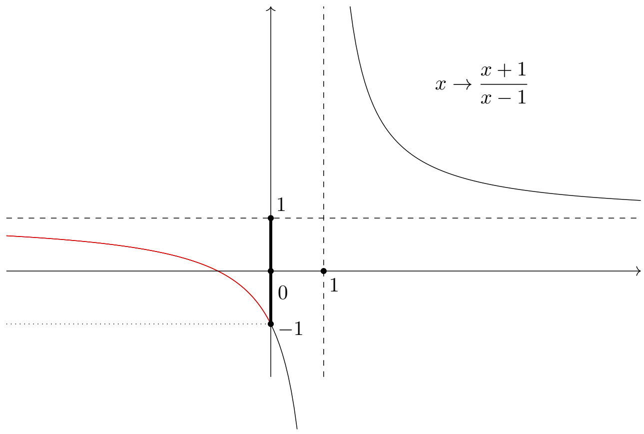
Exercice 4. **Soit la fonction** $f : x \to \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

1. **Déterminer le domaine de définition maximal de** f.

En restriction à l'intervalle $[\pi/2, \pi/2]$, la fonction sinus est bijective de $[\pi/2, \pi/2]$ vers $[-1, 1]$. Par définition, sa bijection réciproque est arcsin, qui est donc définie sur $[-1, 1]$. Donc $f(x)$ est bien définie si et seulement si $(x+1)/(x-1) \in [-1, 1]$. On étudie donc la fonction auxiliaire

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ \qquad\quad x \to \dfrac{x+1}{x-1}. \end{cases}$$

On peut observer que
$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1},$$
et donc g est décroissante sur chaque intervalle de son domaine de définition. On a les limites :
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$$
Donc pour $x \in]1,+\infty[$, $g(x) > 1$. Sur $]-\infty, 1[$, g décroit de 1 à $-\infty$, et on observe que $g(0) = -1$, si bien que c'est pour $x \in \mathbb{R}_-$ que g prend des valeurs dans $[-1, 1[$. (La valeur 1 n'est jamais atteinte par g.) Le graphe de g (une hyperbole) est représenté ci-dessous. Conclusion : f est définie sur $\mathbb{R}_-$.



---

2. **Établir un tableau de variations pour f et esquisser le graphe de f.**

On calcule :
$$f'(x) = \left(1 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2\right)^{-1/2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}. \tag{2}$$
Pour le calcul de f' ci-dessus, on a utilisé la formule de dérivation des fonctions composées et la formule pour la dérivée de $\arcsin$. D'après (2), on voit que $f' < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Par ailleurs,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to 1} \arcsin(y) = \frac{\pi}{2}, \qquad f(0) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$
Pour gagner un peu en précision dans l'esquisse du graphe de f, on peut par exemple calculer l'équation de la tangente au point $x = -1$. On a $f'(-1) = -1/2$, donc la tangente au point -1 a pour équation
$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1), \quad \text{c'est-à-dire} \quad y - 0 = -(1/2)(x+1).$$
Le graphe de f est représenté ci-dessous, avec sa tangente en $x = -1$ en pointillé. Le graphe a une tangente verticale en $x = 0$ (la limite de f' en 0^- est $-\infty$).