

On calcule le pgcd à l'aide de l'*algorithme d'Euclide*. Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{N}^*$. Alors on trouve $q_1, a_2 \in \mathbb{N}$ avec $a_0 = a_1 q_1 + a_2$ et $a_2 = 0$ ou $0 < a_2 < a_1$. Puisque $D(a_0, a_1) = D(a_1, a_2)$, on a $a_0 \wedge a_1 = a_1 \wedge a_2$. Si $a_2 = 0$ on a $a_1 \mid a_0$ et $D(a, b) = D(a_0, a_1) = D(a_1)$, d'où $a \wedge b = a_1$. Si $a_2 \neq 0$ on itère avec a_1, a_2 . Puisque la suite d'entiers $(a_i)_i$ décroît strictement, l'algorithme s'arrête. Pour calculer des coefficients de Bézout, on calcule $u_n, v_n \in A$ tel que $a_n = u_n a + v_n b$. On pose $u_0 = v_1 = 1$ et $u_1 = v_0 = 0$. Si $a_{n-1} = u_{n-1} a + v_{n-1} b$ et $a_n = u_n a + v_n b$, on obtient

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_{n-1} - a_n q_n \\ &= u_{n-1} a + v_{n-1} b - (u_n a + v_n b) q_n \\ &= (u_{n-1} - q_n u_n) a + (v_{n-1} - q_n v_n) b. \end{aligned}$$

Ainsi $u_{n+1} = u_{n-1} - q_n u_n$ et $v_{n+1} = v_{n-1} - q_n v_n$. On itère.

Exemple 0.0.1. Calculer $597 \wedge 322$, ainsi que des coefficients de Bézout.

n	$a_{n-1} = a_n \times q_n + a_{n+1}$	u_n	v_n
0	$597 \quad 322$	1	0
1	$597 = 322 \times 1 + 275$	0	1
2	$322 = 275 \times 1 + 47$	1	-1
3	$275 = 47 \times 5 + 40$	-1	2
4	$47 = 40 \times 1 + 7$	6	-11
5	$40 = 7 \times 5 + 5$	-7	13
6	$7 = 5 \times 1 + 2$	41	-76
7	$5 = 2 \times 2 + 1$	-48	89
8	$2 = 1 \times 2 + 0$	137	-254

Ainsi $597 \wedge 322 = 1 = 597 \times 137 - 322 \times 254$.