Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'Automne 2024-2025
Cursus préparatoire : Analyse 1 et Algèbre 1 23 Octobre 2024

Devoir surveillé N°2 - Erreurs communes et commentaires
Durée : 1h30

Exercice 1 (5 points)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x} + 1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrez que f est bijective.
2. On fixe $y \in \mathbb{R}^{*+}$. Déterminez $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$, puis en déduire la fonction réciproque de f.
3. Etudiez les variations de la fonction $f \circ \sin$ restreinte à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Solution: *Commentaire :* Exercice assez mal réussi dans l'ensemble. Beaucoup trop d'erreurs dans les calculs et de raccourcis dans les raisonnements.

Erreurs communes :

1. (a) Trop d'erreurs dans le calcul de f'.
   (b) Pour montrer l'injectivité, certains ont essayé de résoudre $f(x) = f(x')$. Attention : l'identité $e^x e^{x'} = e^{xx'}$ est FAUSSE en général !
   (c) La stricte croissante de f n'implique PAS la bijectivité (déjà il faut rappeler que f est continue, et surtout il faut étudier son image).
2. Trop d'erreur de calcul. Quand l'équation du second degré est résolue, la plus petite racine est éliminée sans vraiment justifier qu'elle est négative, même si c'est dit (parfois, à cause des erreurs de calcul elle est même positive...).
3. Certains n'utilisent pas la formule de la dérivée d'une composée et refont une page de calculs inutiles. Trop nombreux sont ceux qui écrivent $\sin' = -\cos$ ou ne connaissent pas le signe de cos sur $[0, 2\pi]$...

Exercice 2 (2 points)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x, y) = (x + y, xy)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ?

Solution: *Commentaire :* Pas très bien réussi.

Exercice 3 (4 points)**.** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (en justifiant) et donner leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow x \leq 0)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall y > 0, x \leq y) \Rightarrow x \leq 0$.
5. $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (f \circ g \text{ injective }) \Rightarrow g \text{ injective}$.

Solution: *Commentaire :* Très mal réussi (à part la question 2.) dans l'ensemble ! La négation d'une implication n'est toujours pas maîtrisée (questions 3–5).

Erreurs communes :

1. Montrer que cela est vrai sur un exemple (par exemple si on prend $x = 1$ alors cela est vrai avec $y = 2$) n'implique PAS que cette formule propositionnelle est vraie. Quand on veut montrer qu'une formule du type "$\forall x \ldots$" est vraie, il faut montrer que c'est vrai pour tout x (!).
2. Bien réussie.
3. Trop souvent on me présente un raisonnement du type : "avec $x = 1$ et $y = 2$ ça ne marche pas". Attention, quand on veut montrer qu'une formule propositionnelle du type "$\exists x \ldots$" est fausse, cela ne marche PAS de trouver un x pour lequel c'est faux (!!). Il faut montrer que c'est faux pour tous.
4. Question traitée en TD et pourtant très mal réussie. Trop souvent on pense que $x = 1$ et $y = 2$ fournit un contre-exemple.
5. Le contraire de "être injective" n'est PAS "être surjective".

Exercice 4 (8 points)**.** Soit E un ensemble. Etant donnés deux ensembles $A, B \subseteq E$, on définit la *différence symétrique* $A\Delta B$ de A et de B par la formule

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Remarquez que par définition, on a $A\Delta B \subseteq A \cup B$ et $A\Delta B = B\Delta A$.

1. On suppose pour cette question uniquement que $E = \mathbb{R}$. Calculez $A\Delta B$ lorsque $A = [-1, 1]$ et $B = [0, 2]$. On donnera la solution sous la forme d'une union d'intervalles.

Soient A, B, C trois sous-ensembles quelconques de E.

2. Calculez $A\Delta\emptyset$, $A\Delta A$ et $A\Delta E$.
3. Montrez que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. *Indication : on pourra procéder par double inclusion.*

4. Supposons $A\Delta B = A\Delta C$. Montrez que pour tout $x \in B$, on a $x \in C$ *Indication : on pourra distinguer les cas $x \in A$ et $x \notin A$.*
5. Déduire de la question précédente que $A\Delta B = A\Delta C$ si et seulement si $B = C$.
6. Trouver toutes les parties $X \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A\Delta X = \emptyset$.

Solution: *Commentaire :* Les deux premières questions ont donné des points faciles. Attention, il FAUT mettre des parenthèses quand il y a des $\cap$ et des $\cup$ (en général $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$, donc $A \cup B \cap C$ n'a pas de sens). Ce n'est pas au correcteur de faire ce travail à la place de l'étudiant.

Erreurs communes :

1. Bien traitée, même si parfois erreurs sur les bornes non incluses.
2. Assez bien réussi, même si on a des $A \cap \emptyset = A$ qui se promènent.
3. Rédaction parfois confuse.
4. Mal réussie. Il fallait commencer par prendre $x \in B$ et distinguer après si $x \in A$ ou $x \notin A$. Certains s'embrouillent en prenant $x \in A$ en premier etc. Attention à bien introduire vos variables aussi (qui est x ?), ce n'est pas au correcteur de deviner dans quel ensemble vit x.
5. Très mal rédigée. Beaucoup oublient la réciproque aussi (même si c'est trivial, dites-le).
6. Mal ou insuffisamment justifié dans l'ensemble.

Exercice 5 (4 points)**.** Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Soient $A, B \in \mathcal{P}(F)$.

1. Montrez que $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ et $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
2. Montrez que $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.
3. Montrez que $f^{-1}[A\Delta B] = \big(f^{-1}[A]\big)\Delta\big(f^{-1}[B]\big)$, où l'opérateur différence symétrique Δ est défini comme à l'exercice 4.

Solution: *Commentaire :* Première question faite en TD / cours, et pourtant parfois TRES mal rédigée. Il faut introduire vos variables. Certains n'ont pas encore compris ce qu'était l'image réciproque d'un ensemble (confusions).

Erreurs communes :

1. Il faut justifier pourquoi $x \in f^{-1}[A \cup B] \Leftrightarrow x \in f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ en passant par $f(x)$. Attention la fonction réciproque f^{-1} n'existe pas forcément (on ne suppose pas f bijective), donc $f^{-1}(y)$ n'a PAS de sens (pour $y \in F$).
2. Mêmes remarques.
3. Certains me refont tout le raisonnement en une page de calculs sans penser à utiliser les questions précédentes.