

$f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ intégrable

1. $A = \{x \in X \mid |f(x)| = +\infty\}$

On montre $\mu(A) = 0$

$A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq n\}$ A_n est mesurable

car $A_n = g^{-1}([n; +\infty[)$ où $g(x) = |f(x)|$

Les (A_n) sont décroissantes et $\bigcap_n A_n = A$

d'où $\lim \mu(A_n) = \mu(A)$ car $\mu(A) < +\infty$

car $A_1 = \{x \in X \mid |f(x)| \geq 1\}$

d'où $|f| \geq \chi_{A_1}$ donc $\int |f| \geq \int \chi_{A_1} = \mu(A_1)$

et $\int |f| < +\infty$ par hyp.

On a, pour $n \geq 1$, $\forall x \in A_n$ $|f(x)| \geq n \times 1 = n \chi_{A_n}(x)$
 d'où $|f| \geq n \chi_{A_n}$

donc $n \mu(A_n) \leq \int |f|$

donc $\mu(A_n) \leq \frac{1}{n} \int |f| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

2. f intégrable avec $\int_X |f| d\mu = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} f = 0$ pp.

$A = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. On doit montrer $\mu(A) = 0$.

Soit $n \geq 2$, $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$

alors $A_n \nearrow$ avec $\lim A_n = A \xrightarrow{n \geq 1} n|f(x)| \geq 1$

d'où $\mu(A) = \lim \mu(A_n)$

On a $\forall x$, $n|f(x)| \geq \chi_{A_n}$

$$\text{d' on } \frac{1}{n} \chi_{A_n} = \frac{1}{n} \mu(A_n) \leq \int_X |f(x)| dx = 0$$

$$\text{d' on } \mu(A_n) = 0 \text{ donc } \mu(A) = 0.$$