1. F, G fermés non vides, $F \cap G = \emptyset$ dans (X,d)

$$\phi(x) = \frac{d(x,G)}{d(x,F) + d(x,G)}$$

. On a $d(x,F) + d(x,G) = 0 \iff d(x,F) = d(x,G) = 0$
$\iff x \in F \cap G = \emptyset$

donc ϕ est définie pour tout $x \in X$.

. Si $x \in F \iff d(x,F) = 0$ alors $\phi(x) = \dfrac{d(x,G)}{d(x,G)} = 1$

. Si $x \in G \iff d(x,G) = 0$ alors $\phi(x) = 0$

Rq: $d(x,A) = 0 \iff x \in A$ vrai si A est fermé

. ϕ continue car $x \mapsto d(x,A)$ est continue et même Lips. Soit $a \in A$ alors $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$

d'où $\forall a \in A$, $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,a)$

donc $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$

et ainsi $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$

Par symmétrie, on en déduit finalement

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

donc $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipsch.

2. Résultat admis : A borélien de $\mathbb{R}$, il existe F fermé et U ouvert de $\mathbb{R}$ telle que $F \subseteq A \subseteq U$ et $\lambda(U \setminus F) < \varepsilon$

On considère le cas $f = \chi_A$ avec A mesurable

On utilise la question 1 avec $F = F \cap [0;1]$ et $G = [0,1] \setminus U$

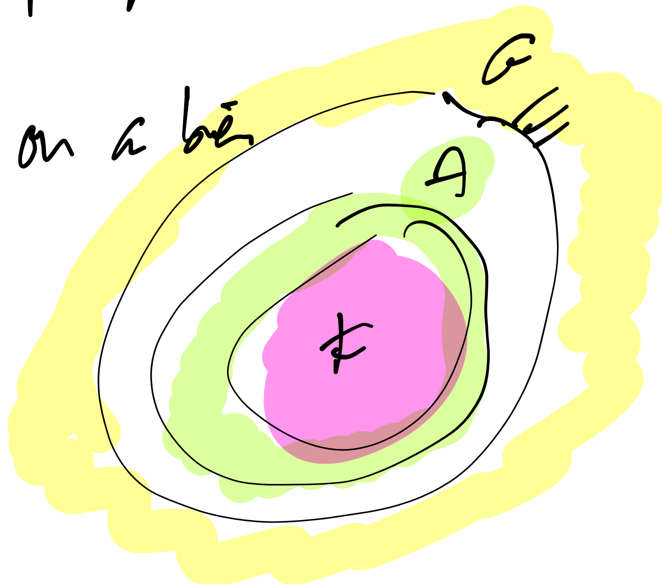
$U \subseteq [0;1]$

La fonction ϕ correspondante est continue. On veut montrer qu'il existe $B \subseteq [0;1]$ mesurable avec $\lambda(B) < \varepsilon$

et $f_{|B^c} = \phi_{|B^c}$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ sur } F \cap [0;1] \\ 0 \text{ sur } [0;1] \setminus U \end{cases}$$

On pose $B = [0;1] \setminus (F \cup G)$. Puisque $F \subseteq A$, on a $\phi_{|F} = f_{|F} = 1$ et puisque $G \subseteq A^c$ on a $\phi_{|G} = f_{|G} = 0$. Donc on a bien



$$\phi_{|[0;1]\setminus B} = f_{|[0;1]\setminus B}.$$

continue

On calcule
$$\begin{aligned}\lambda(B) &= \lambda([0;1]) - \lambda(F \cup G)\\ &= 1 - (\lambda(F) + \lambda(G))\\ &= 1 - (\lambda(F) + (1 - \lambda(U)))\\ &= \lambda(U) - \lambda(F) = \lambda(U \setminus F) < \varepsilon\end{aligned}$$

puisque $G = [0;1] \setminus U$

3. Soit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ $a_i \in \mathbb{R}$, A_i boréliens

Par la question, il existe pour tout i et tout $\varepsilon > 0$ $B_i \subseteq [0;1]$ avec $\lambda(B_i) < \varepsilon'$, $g_i : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \notin B_i$, $\chi_{A_i}(x) = g_i(x)$

En particulier, $\forall \varepsilon > 0$, on peut trouver les mêmes

B_i et g_i avec $\lambda(B_i) < \varepsilon/n$

On pose $g = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ et $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

Pour $x \notin B$, on a $x \notin B_i$, $\forall i$ donc $g_i(x) = \chi_{A_i}(x)$

et $g(x) = f(x)$, g est continue car somme de

fonctions continues et $\lambda(B) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(B_i) < \varepsilon$

3. Soit (f_n) une suite de fonctions étagées

convergeant simplement vers f.

On fixe pour chaque $n \geq 1$, un borélien $B_n \in [0;1]$,

une fonction continue g_n tels que $\forall x \notin B_n$, $f_n(x) = g_n(x)$

et $\lambda(B_n) < \varepsilon/2^{n+1}$. On pose $B' = \bigcup_{n \geq 1} B_n$,

on a $\forall n$, f_n continues sur $[0;1] \setminus B'$

et $\lambda(B') \leq \sum_{n\geq 1} \lambda(B_n) \leq \sum_{n\geq 1} \varepsilon/2^{n+1} = \varepsilon/2$

Sur $[0;1] \setminus B'$, $f_n \to f$ simplement

Par le théorème de Egoroff, il existe $B'' \in [0;1]$
telle que $f_n \to f$ unif. sur $[0;1] \setminus B''$
avec $\lambda(B'') \leq \varepsilon/2$

On pose $B = B' \cup B''$, on a $f_n \to f$ unif sur
$[0;1] \setminus B$ et f_n continues sur $[0;1] \setminus B$ donc
f continue sur $[0;1] \setminus B$.

et $\lambda(B) \leq \lambda(B') + \lambda(B'') \leq \varepsilon$