1. $B \subseteq \mathbb{R}$ : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists b \in B$ avec $x - b \in \mathbb{Q}$

Si $B$ mesurable alors $\lambda(B) > 0$.

---

On montre que $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + B)$ (⊗)

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $b \in B$ tel que $x - b = q \in \mathbb{Q}$

d'où $x = q + b \in q + B$.

Si $\lambda(B) = 0$ alors $\lambda(q+B) = 0$ $\forall q \in \mathbb{Q}$

mais par ⊗ $\lambda(\mathbb{R}) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(q + B) = 0$
($\mathbb{Q}$ dénombrable) Contradiction

2. $B \subseteq [0;1]$ avec $\forall x, y \in B$, $x \neq y \Rightarrow x - y \notin \mathbb{Q}$

Soit $\delta \in [0;1] \cap \mathbb{Q}$, on pose $B_\delta = \delta + B$

alors $B_\delta \subseteq [0;2]$ or si $\eta \in [0;1] \cap \mathbb{Q}$ avec $\eta \neq \delta$

alors $B_\delta \cap B_\eta = \emptyset$. Sinon $\exists a \in B_\delta \cap B_\eta$,

disons $a = \delta + x = \eta + y$ avec $x, y \in B$

et on a $x - y = q - \delta \in \mathbb{Q}$ d'où $x = y$ et $q = \delta$

Contradiction

Add

On a donc $\bigcup_{\delta \in [0;1] \cap \mathbb{Q}} B_\delta \subseteq [0;2]$ (**)

← mesurable

Si B est mesurable alors $B_\delta$ est mesurable $\forall \delta \in [0;1] \cap \mathbb{Q}$ de même mesure

donc si $\lambda(B) > 0$ alors

$$\lambda\left(\bigcup_\delta B_\delta\right) = \sum_\delta \lambda(B) = +\infty$$

mais $\underset{(**)}{\leq} \lambda([0;2]) = 2$

Contradiction

3. Si B vérifie (1) et (2) et si B est Lebesgue-mesurable alors $\lambda(B) > 0$ et $\lambda(B) = 0$ contradiction

Donc une telle partie de $\mathbb{R}$ n'est pas mesurable.

On construit une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant (1) et (2)

Sur $[0;1]$, on définit la relation $x \sim y$ par $x-y \in \mathbb{Q}$. C'est une relation d'équivalence.

On prend pour $B$ un système de représentants des classes d'équivalence (axiome du choix)