

Exo. $A \in GL_n(\mathbb{R})$ 1. $\|\cdot\|$ norme sur $\mathbb{R}^n$

$\|\cdot\|$ norme subordonnée associée

$$1. \forall x \in \mathbb{R}^n, \|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$$

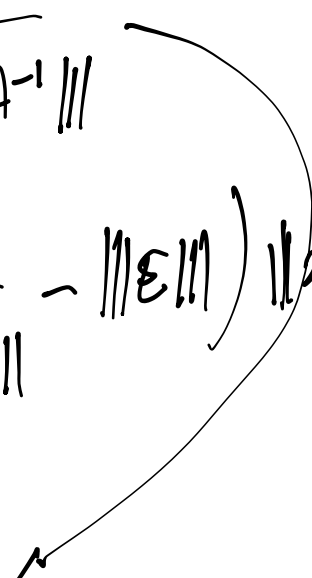
Remarque: $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et donc $\|A^{-1}\| \neq 0$ (à faire)

$$\text{On a } \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|y\|$$

$$\text{d'où } \|y\| \geq \frac{\|A^{-1}y\|}{\|A^{-1}\|}$$

$$\text{On prend } y = Ax \text{ d'où } \|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$$

$$2. E \in M_n(\mathbb{R}) \text{ avec } \|E\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

$$\text{Montrer: } \|Ax + Ex\| \geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|E\| \right) \|x\|$$


On a $\|A^{-1}E\| \leq \|A^{-1}\| \times \|E\|$ car $\| \cdot \|$ matricielle

$$\text{donc } \|A^{-1}Ex\| \leq \|A^{-1}E\| \times \|x\| < \|x\| \quad \text{pour } x \neq 0$$

$$\text{On écrit } Ax + Ex = A \left[x + A^{-1}Ex \right]$$

Par la question 1,

$$\|Ax + Ex\| = \|A(x + A^{-1}Ex)\| \geq \frac{\|x + A^{-1}Ex\|}{\|A^{-1}\|}$$

$$\geq \frac{\|x\| - \|A^{-1}Ex\|}{\|A^{-1}\|} \geq \frac{\|x\| - \|A^{-1}E\| \cdot \|x\|}{\|A^{-1}\|}$$

$$\text{car } \|A^{-1}Ex\| \leq \|A^{-1}E\| \cdot \|x\|$$

$$\geq \frac{\|x\| - \|A^{-1}\| \cdot \|E\| \cdot \|x\|}{\|A^{-1}\|} \quad \text{car } \|A^{-1}\| \cdot \|E\| \leq \|A^{-1}E\|$$

$$\left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|E\| \right) \|x\|$$

En déduire $A+E$ inversible. Puisque $\|E\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

on a donc $\forall x, \quad \underbrace{\|Ax + Ex\|}_{(A+E)x} \geq c\|x\|$ avec $c > 0$

d'où si $x \neq 0$ alors $(A+E)x \neq 0$

donc $A+E$ est inversible

3. $A = I_n$

Th. $E \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\|E\| < 1$
alors $I_n + E$ est inversible