Exo. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix}$

1.

Forme quadratique $\langle x, Ax \rangle = \dots =$ réduction de Gauss

$$(2x_1 + x_2 + x_3)^2 + (3x_2 + 2x_3)^2 + (4x_3)^2$$

définie positive

2. On a

$$\langle x, Ax \rangle = \langle (2x_1 + x_2 + x_3, 3x_2 + 2x_3, 4x_3), * \rangle$$

$$= \langle L'x, L'x \rangle \quad \text{où } L' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \langle x, L'^t L' x \rangle$$

et donc $L = L'^t$

$$= \langle x, LL^t x \rangle \quad \forall x$$

donc $A = LL^t$

Résultat : q forme quadratique

$$q = \sum_{i=1}^{t} d_i f_i^2 \quad \text{décomposition} \dots$$

$s = \# \{ i \mid d_i > 0 \}$

$t = \# \{ i \mid d_i < 0 \}$

alors (s,t) est la signature de q — dim.

- q positive si $t=0$
- q déf. positive si $s=n, t=0$
- q négative si $s=0$
- q déf. négative si $s=0, t=n$

---

3. Résoudre $Ax=b$ avec $b=\begin{pmatrix}0\\0\\96\end{pmatrix}$

On a $LL^t x = b \Leftrightarrow L^t x = L^{-1} b$

L^{-1} est facile à calculer car L est triangulaire

On trouve $L^{-1} b = \begin{pmatrix}0\\0\\24\end{pmatrix}$ et donc on a pour finir

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_3 = 24 \end{cases} \leadsto x = \begin{pmatrix}-1\\-4\\6\end{pmatrix}$$