"Reconnaître" les groupes

- S_n/A_n ? $\quad A_n = \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$

$\mathrm{sign} : S_n \to \{\pm 1\}$ $\quad \mathrm{sign}(\sigma\pi) = \mathrm{sign}(\sigma)\,\mathrm{sign}(\pi)$

morphisme de groupes

$A_n = \mathrm{Ker}(\mathrm{sign})$

d'où par factorisation $\boxed{S_n/A_n \simeq \mathrm{Im}(\mathrm{sign})}$

- $n=1$: $\quad S_n/A_n = \{1\}$
- $n \geq 2$: il existe $\tau \in S_n$ transposition

$\mathrm{sign}(\tau) = -1 \Rightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{sign}) = \{\pm 1\}$

$$S_n/A_n \simeq \{\pm 1\}$$

- $O_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$?

mult.

$O_n(\mathbb{R})$ groupe orthogonal : $M^tM = Id$

$SO_n(\mathbb{R})$ groupe spécial ortho.

$= \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$

$\det_0 : O_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ morphisme

$SO_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} \det_0$

$\rightsquigarrow \quad O_n(\mathbb{R}) / SO_n(\mathbb{R}) \simeq \operatorname{Im} \det_0$

$M \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det M = \pm 1$

$M = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R})$ avec $\det M = -1$

d'où $\quad O_n(\mathbb{R}) / SO_n(\mathbb{R}) \simeq \{\pm 1\}$

$$\begin{array}{c} \{\pm 1\} \\ \wr\!\wr \\ S_n / A_n \end{array}$$

• $GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R})$?

$\det M \neq 0$

$GL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \text{ inversible} \}$ groupe

$SL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}$ sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$

$M \in GL_n(\mathbb{R})$

On a $\det_G : Gl_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ morphisme

et $Sl_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} \det_G$

d'où $Gl_n(\mathbb{R}) / Sl_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Im} \det_G$

On a $\mathrm{Im} \det_G = \mathbb{R}^\times$, en effet $\forall \lambda \in \mathbb{R}^\times$

$M = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in Gl_n(\mathbb{R})$ avec $\det M = \lambda$

or $Gl_n(\mathbb{R}) / Sl_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^\times$

- Exo: $\mathbb{R}^\times / \mathbb{R}^\times_+$

---

2. Iso. à montrer

$S_1 = \{ z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1 \}$

groupe mult.

⊂ sous-groupe mult.

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S_1$

additif

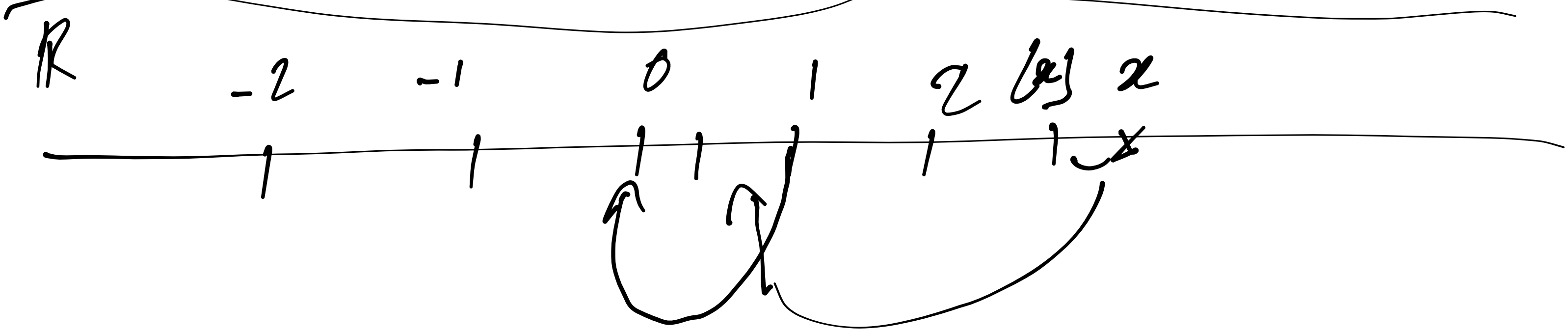
$\mathbb{R} \to S_1 = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$

$\theta \mapsto e^{i\theta}$ morphisme $\qquad e^{i(\alpha+\theta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\theta}$

$f : \theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$ morphisme ← surj.

$\theta \in \ker f \iff e^{2i\pi\theta} = 1 \iff \theta \in \mathbb{Z}$

d'où $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S_1$



- $\mathbb{R}^\times/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{R}_+^\times$ à faire

- $\mathbb{C}^\times/S_1 \simeq \mathbb{R}_+^\times$

groupe mult.

$f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}_+^\times$ morphisme de groupes

$z \mapsto |z|$

$\mathrm{Ker} f = S_1 \qquad \mathrm{Im} f = \mathbb{R}_+^\times \quad \text{car } x \in \mathbb{R}_+^\times,\ x = |x|$

d'où $\quad \mathbb{C}^\times / S_1 \simeq \mathbb{R}_+^\times$

$(f(H) = H)$

H sous groupe de G

$H \sqsubset G$ si $\forall f \in \underline{\mathrm{Aut}}(G)\ ,\ f(H) \subseteq H$

- $H \sqsubset G \Rightarrow H \lhd G$

Auto. intérieur $\quad \mathrm{Int}(G) = \{ i_g : g \in G \}$

avec $\quad i_g : G \to G \qquad$ automorphisme

$\qquad x \mapsto gxg^{-1} \qquad (i_g)^{-1} = i_{g^{-1}}$

$$i_g(i_{g^{-1}}(x)) = i_g(g^{-1}xg) = \cancel{gg^{-1}}x\cancel{gg^{-1}} = x$$

Remarque : $H \lhd G$ ssi $\forall f \in \mathrm{Int}(G)\ ,\ f(H) \subseteq H$

$\Updownarrow$

$\forall g \in G, \forall h \in H, \; ghg^{-1} \in H$

$\Updownarrow \qquad\qquad \text{"} \; i_g(h)$

$\forall g \in G \quad i_g(H) \subseteq H$

D'où on a bien $H \sqsubset G \Rightarrow H \triangleleft G$

2. $H \sqsubset K \sqsubset G \Rightarrow H \sqsubset G$?

$H \sqsubset K : \forall f \in \mathrm{Aut}(K), \; f(H) \subseteq H$

$K \sqsubset G : \forall f \in \mathrm{Aut}(G), \; f(K) \subseteq K$

Soit $f \in \mathrm{Aut}(G)$, on veut montrer que $f(H) \subseteq H$

On a $f_{|K} : K \to K$ car $f(K) \subseteq K$

et $f_{|K} \in \mathrm{Aut}(K)$ ← à vérifier

d'où $f_{|K}(H) \subseteq H$ mais $f_{|K}(H) = f(H)$

puisque $H \subseteq K$

d'où $f(H) \subseteq H$

3. $H \sqsubset K \trianglelefteq G \Rightarrow H \trianglelefteq G$?

$K \trianglelefteq G$: $\forall f \in \mathrm{Int}(G)$, $f(K) \subseteq K$

$H \sqsubset K$: $\forall f \in \mathrm{Aut}(K)$, $f(H) \subseteq H$

$H \trianglelefteq G$? Soit $f \in \mathrm{Int}(G)$, on a $f|_K \in \mathrm{Aut}(K)$

d'où $\underset{\overset{\shortparallel}{f(H)}}{f|_K(H)} \subseteq H$ et on a bien $H \trianglelefteq G$