

Ex 1. $(e_1, \dots, e_n)$ vecteurs de E orthonormés (de dim. finie)

avec $\|e_1\| = \dots = \|e_n\| = 1$.

Montrer: $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \Leftrightarrow (e_1, \dots, e_n)$
base orth. de E

$\boxed{\Leftarrow}$ $(e_1, \dots, e_n)$ base orth. de E

$x \in E$, on écrit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$$\text{or } \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \alpha_j e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\substack{0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

$$\text{mai)} \quad \langle x, e_i \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle e_j, e_i \rangle = \alpha_i$$

$$\text{d'où } \|x\|^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2$$

$$\boxed{\Rightarrow} \forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2$$

Il suffit de montrer que les e_i forment une base orthogonale.

$$\bullet \text{ Verif } (e_1, \dots, e_n) = \text{B} \quad ?$$

Soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Supposons $F \neq E$.

Alors $E = F \oplus F^\perp$ or donc il existe $z \in F^\perp$

$$\text{avec } z \neq 0. \text{ (Or) } \|z\|^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle z, e_i \rangle}_{=0}^2 = 0 \quad \#$$

car $z \neq 0$ car $z \in F^\perp$

• Famille ortho. ?

$$\text{On a } \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_j \rangle^2 = 1 + \sum_{i \neq j} \langle e_i, e_j \rangle^2$$

1

car e_j est normé

$$\text{d'où } \sum_{i \neq j} \langle e_i, e_j \rangle^2 = 0 \Rightarrow \forall j \neq i, \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

$\hookrightarrow$ nombre ≥ 0

• Famille linéaire

Supposons $\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n}_{=0} = 0$

On calcule $\langle \underbrace{}_{=0}, e_i \rangle = \langle 0, e_i \rangle = 0$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle e_j, e_i \rangle = \lambda_i \text{ donc } \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

Conclusion : $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E .

Ex 2 :

$$\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

$$E = \mathbb{R}_2[x]$$

polynômes de degré ≤ 2

$\mathbb{R}$ -ev de dim 3

Base $(1, x, x^2)$

$$F = \mathbb{R}_1[x]$$

sev des poly. de degré ≤ 1

On définit un produit scalaire sur E

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f(x)^2 dx$$

On pose $g(x) = x^2$. $f(x) = ax + b$

Problème: trouver $f \in F$ tel que

$$\|g - f\| \text{ est minimale}$$

$$\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

Réponse f est le projeté ortho. de g sur F

Ban de F : $(1, x)$ $a_1 = 1$
 $a_2 = x$

On applique GS : $f_1 = a_1 = 1 \dots a_2 = x$

$$f_2 = a_2 = x - \frac{1}{2} \dots e_2 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{d'où } f = \langle g, e_1 \rangle e_1 + \langle g, e_2 \rangle e_2 = x - \frac{1}{6}$$

$$\text{donc } \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 dx$$

$$\dots = \frac{1}{180}$$

Exo 3.

1. $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer il existe S, T symétrie
avec $S^t = S$, $T^t = -T$ et $A = S + T$.

On pose $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ et $T = \frac{1}{2}(A - A^t)$
 symétrique $S_n(\mathbb{R})$ antisymétrique
 $4_n(\mathbb{R})$
 et on a bien $S + T = A$

$$\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$$

$$\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des s.v. de $M_n(\mathbb{R})$

avec $S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$

et $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$

donc $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

et l'écriture de $N \in M_n(\mathbb{R})$ comme

$N = S + T$ avec $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $T \in A_n(\mathbb{R})$
 est unique

2. $\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle = \text{plus grande vp de } S ?$

$$A = S + T \quad x \in \mathbb{R}^n \quad S \in S_n(\mathbb{R}), T \in A_n(\mathbb{R})$$

$$\text{Or on a } \langle x, nx \rangle = \langle n^t x, x \rangle \quad \forall n \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$$

En particulier

$$\begin{aligned} \langle x, Tx \rangle &= \langle T^t x, x \rangle \\ &= \langle -Tx, x \rangle = -\langle Tx, x \rangle \\ &= -\langle x, Tx \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \langle x, Tx \rangle = 0.$$

$$\text{Et donc } \langle x, Ax \rangle = \langle x, Sx \rangle \quad \swarrow$$
$$\langle x, (S+T)x \rangle = \langle x, Sx + Tx \rangle = \dots$$

Par le théorème spectral, S est diagonalisable et

$$S = PDP^{-1} \text{ avec } P \text{ ortho. et } D \text{ diagonale.}$$

$$P^{-1} = P^t$$

or also $\max_{\|x\|=1} \langle x, Sx \rangle = \max_{\|x\|=1} \langle x, Dx \rangle$

On a $\forall y, z, \quad \langle y, z \rangle = \langle Py, Pz \rangle$

En effet $\langle Py, Pz \rangle = \langle P^t Py, z \rangle$
 $= \langle P^{-1} Py, z \rangle = \langle y, z \rangle$

Donc $\langle x, Sx \rangle = \langle x, PDP^{-1}x \rangle$
 $= \langle P^{-1}x, P^t P D P^{-1}x \rangle$
 $= \langle P^{-1}x, D(P^{-1}x) \rangle$

mais $x \mapsto P^{-1}x$ est un bijection sur

$\{x \in E \mid \|x\|=1\}$ $y = P^{-1}x$

d'où $\max_{\|x\|=1} \langle x, Sx \rangle = \max_{\|y\|=1} \langle y, Dy \rangle$

On écrit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec λ_i vp de S

$$\langle x, \mathbb{D}x \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \quad \text{or} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

On doit montrer que

$$\max_{\|x\|=1} (\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2) = \max_{\substack{i \\ \lambda_i \leq \lambda_0}} \lambda_i$$

$$\|x\|=1 \Leftrightarrow x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

$$\forall i \quad \lambda_i \leq \lambda \Rightarrow \lambda_i x_i^2 \leq \lambda x_i^2$$

$$\Rightarrow \sum_i \lambda_i x_i^2 \leq \lambda \left(\sum_i x_i^2 \right) = \lambda$$

$$\text{donc} \quad \max_{\|x\|=1} \left(\sum_i \lambda_i x_i^2 \right) \leq \lambda_0$$

Si on prend $x = (x_i)$ avec $x_i = 1$ si $i = i_0$
 $x_i = 0$ sinon

on a bien $\|x\|=1$

$$\text{or} \quad \sum_i \lambda_i x_i^2 = \lambda_{i_0}$$

or finalement $\max_{\|x\|=1} \left(\sum_i \lambda_i x_i^2 \right) = \lambda_{i_0}$

Conclusion = $\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle = \lambda_{i_0}$

3. Maximiser $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1$

avec $a_i \in \mathbb{R}$ et $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$

$\|a\|=1 \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$

On a $\langle a, Aa \rangle = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On calcule $S = \frac{1}{2} (A + A^t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

son polynôme caract. est $T^4 - T^2 = T^2(T^2 - 1)$
 $= T^2(T-1)(T+1)$

donc la plus grande valeur propre est 1