

$$CS \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}_{\in \mathbb{R}} + \langle y, y \rangle$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{|\langle x, y \rangle| + |\langle y, x \rangle|}_{2|\langle x, y \rangle|}$$

$$CS \quad \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|$$

$$\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \square$$