Réduction de Gauss

$$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 14x_2x_4 + 5x_3^2 - 8x_3x_4 + 10x_4^2$$

Identité $\quad (x+a)^2 - a^2 = x^2 + 2ax$

$$x_1^2 + 2x_1\big[\underbrace{-x_2 + 2x_3 - x_4}_{a}\big]$$

$$= (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 - [-x_2 + 2x_3 - x_4]^2$$

$$\rightsquigarrow q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 - [-x_2 + 2x_3 - x_4]^2 + \dots$$

$$q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 12x_2x_4 + x_3^2 - 4x_3x_4 + 9x_4^2$$

Identité $\quad (a_1 + \dots + a_k)^2 = \sum a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j$

$$\to 4\left[x_2^2 - x_2x_3 + 3x_2x_4\right] = 4\left[x_2^2 + 2x_2\left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4\right)\right]$$

$$= 4\left[\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4\right)^2 - \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4\right)^2}\right]$$

D'où

$$q(x) = \left(x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4\right)^2 + 4\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4\right)^2 + 2x_3x_4$$

Identité : $xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$

$$q(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^2 + 4\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4\right)^2$$

$$\frac{1}{2}(x_3 + x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_3 - x_4)^2$$

$\hookrightarrow$ base orthogo. avec matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + 3x_2x_4 + 9x_3x_4$$

Pas de <u>termes</u> carrés

<u>Identité</u> : $xy + xa + yb = (x+b)(y+a) - ab$

$$x_1x_2 + x_1\big(\overbrace{2x_3 - x_4}^{a}\big) + x_2\big(\overbrace{x_3 + 3x_4}^{b}\big)$$

$$= \underbrace{(x_1 + x_3 + 3x_4)(x_2 + 2x_3 - x_4)}_{} - (2x_3 - x_4)(x_3 + 3x_4)$$

on remplace

$$q(x) = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4)^2$$

$$\underbrace{-2x_3^2 + 4x_3x_4 + 3x_4^2}$$

$$-2(x_3 - x_4)^2 + 5x_4^2$$

↳ base orthog. de matrice $\begin{pmatrix} 1/4 & & & \\ & -1/4 & & 0 \\ & & -2 & \\ 0 & & & 5 \end{pmatrix}$