Supposons $q(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i f_i(x)^2$

où $d_i \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $\quad f_i \in E^*$

avec $(f_1, \dots, f_n)$ base de E^*

Décomposition de q (sous forme de somme de carrés de formes linéaires indépendantes)

On pose $(e_1, \dots, e_n)$ la base contraduale de $(f_1, \dots, f_n)$. Alors cette base est orthogonale.

En effet, on doit avoir pour $i \neq j$

$\phi(e_i, e_j) = 0$, on calcule

$$\phi(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\left[q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j)\right]$$

et $q(e_i) = \sum_{l=1}^{n} d_l f_l(e_i)^2 = d_i$ par construction

de même $q(e_j) = d_j$

$$q(e_i + e_j) = \sum_{l=1}^{n} d_l \left[f_l(e_i) + f_l(e_j)\right]^2 = d_i + d_j$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } l \neq i, j \\ 1 & \text{si } l = i \ (\Rightarrow l \neq j) \\ 1 & \text{si } l = j \ (\Rightarrow l \neq i) \end{cases}$$

d'où $\phi(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\left[d_i + d_j - d_i - d_j\right] = 0$

De plus la matrice de q sur cette base est

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$$