Noyau d'un morphisme $f : G_1 \to G_2$

$f$ morphisme

$Ker(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\}$

$\forall x, y \in G_1 \quad f(xy) = f(x)f(y)$

- $Ker(f)$ sous-groupe de $G_1$
  - $e_1 \in Ker(f)$ ? $\quad f(e_1) = e_2$ d'où $e_1 \in Ker f$
  - $\forall x, y \in Ker(f)$ alors $xy \in Ker(f)$ ?

On a $f(xy) = f(x)f(y)$ car $f$ morphisme

$$= \underset{x \in Ker f}{e_2} \cdot \underset{y \in Ker f}{e_2} = e_2$$ d'où $xy \in Ker(f)$

- $\forall x \in Ker(f)$, alors $x^{-1} \in Ker(f)$ ?

On a $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = e_2^{-1} = e_2$ d'où $x^{-1} \in Ker(f)$

- $f$ injective ssi $Ker f = \{e_1\}$ ?

$f$ non injective ssi $Ker f \neq \{e_1\} \Leftarrow \exists a \in Ker f$ avec $a \neq e_1$

$f$ non injective $\iff \exists x, y \in G_1,\ x \neq y$

et $f(x) = f(y)$

$\iff$ ——— ——

et $f(x) f(y)^{-1} = e_2$

$\iff$ ———

et $f(xy^{-1}) = e_2$

$z = xy^{-1}$

$\iff \exists z \in G_1,\ z \neq e_1$

et $f(z) = e_2$

$\iff \operatorname{Ker} f \neq \{e_1\}$ (il contient aussi $z$)