$g \in G$ d'ordre n avec $n \geq 1$ entier

$\langle g \rangle = \{g^0, \dots, g^{n-1}\}$ ← n éléments

- $\langle g \rangle = \{g^s, s \in \mathbb{Z}\}$?
  .. Montrer que $\{g^s, s \in \mathbb{Z}\}$ sous-groupe
  .. Soit H sous groupe de G avec $g \in H$ alors $\{g^s, s \in \mathbb{Z}\} \subseteq H$

- $\langle g \rangle \subseteq \{g^0, \dots, g^{n-1}\}$?

Soit $g^s \in \langle g \rangle$, $(s \in \mathbb{Z})$, on écrit $s = qn + r$ avec $0 \leq r \leq n-1$

or $g^s = g^{qn+r} = (\underbrace{g^n}_{= e \text{ car } g \text{ d'ordre } n})^q \cdot g^r = g^r \in \{g^0, \dots, g^{n-1}\}$

$\Rightarrow \langle g \rangle = \{g^0, \dots, g^{n-1}\}$

- $\{g^0, \dots, g^{n-1}\}$ est de cardinal n ; c'est-à-dire

$\forall i, j$ avec $0 \leq i, j \leq n-1$, $i \neq j \Rightarrow g^i \neq g^j$

On procède par l'absurde : il existe $0 \leq i < j \leq n-1$

avec $g^i = g^j$ alors $\boxed{g^{j-i} = e}$ $\boxed{\text{or } 1 \leq j-i \leq n-1}$

Contradiction : car n est le plus petit

entier ≥ 1 avec $g^n = e$

Remarque : $\mathrm{card}\langle g \rangle = \mathrm{ordre}(g)$

$$|\langle g \rangle| = \mathrm{ordre}(g)$$

$$\underbrace{\mathrm{ordre}}_{\text{comme groupe}} \langle g \rangle = \underbrace{\mathrm{ordre}}_{\text{comme élément}} (g)$$