(X,d) métrique compact

f tq $(*)$ $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ si $x \neq y$

1. f admet au plus un point fixe ?

Supposons z et z' sont points fixes de f avec $z \neq z'$

Par $(*)$ $$\underbrace{d(f(z),f(z'))}_{d(z,z') \text{ car } z \text{ et } z' \text{ pts fixes}} < d(z,z')$$

Contradiction

Donc il y a au plus un point fixe.

2. $\exists z \in X$ avec $d(z,f(z)) \leq d(x,f(x))$ $\forall x \in X$?

On pose $$T : X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto d(x,f(x))$$

On montre que T est continue. En fait T est Lips.

En effet $|T(x) - T(y)| = d(x,f(x)) - d(y,f(y))$

(on suppose $d(x,f(x)) \geq d(y,f(y))$ par symétrie)

$$\leq d(x,y) + \cancel{d(y,f(y))} + d(f(y),f(x)) - \cancel{d(y,f(y))}$$

(à montrer)

$$\leq d(x,y) + d(x,y) = 2\,d(x,y)$$

(*)

Puisque X est compact, T atteint son minimum sur X donc il existe $z \in X$ tel que $\forall x \in X$,

$T(z) \leq T(x)$ et c'est le résultat voulu.

3. z est le point fixe de f ?

Supposons que $f(z) \neq z$ alors

$$T(z) = d(z, f(z)) \underset{(*)}{>} d(f(z), f(f(z))) = T(f(z))$$

Impossible par la question 2.

Donc on a $f(z) = z$ et $T(z) = 0$.

4. $x_0 \in X$, on pose $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geqslant 0$.

Montrer $(d(x_n, z))_n$ converge vers $l \geqslant 0$.

On a $d(x_{n+1}, z) = d(f(x_n), f(z)) \underset{(*)}{<} d(x_n, z)$

$x_n \neq z$

donc c'est une suite décroissante minorée par 0,

donc elle est convergente; on note l sa limite.

Remarque : Si $x_n = z$ pour un n,

alors $x_m = z \quad \forall m \geqslant n$

et donc $d(x_m, z) = 0 \quad \forall m \geqslant n$

5. On montre $\ell = 0$, et donc $x_n \to z$

Supposons $\ell > 0$. Puisque X est compact, il existe sous-suite $(x_{s(n)})$ convergente, disons $x_{s(n)} \to y \in X$. Il suit par 4, que $d(y, z) = \ell$ $(y \neq z)$. On considère la suite $(x_{s(n)+1})_n = (f(x_{s(n)}))_n$.

Elle est convergente vers $f(y)$ car f est continue car 1-lips. par $(*)$.

Mais par le même raisonnement que ci-dessus on a $d(f(y), z) = \ell$.

C'est impossible car

$$\ell = d(f(y), z) = d(f(y), f(z)) \underset{(*)}{<} d(y, z) = \ell$$

$z \neq y$ car $\ell > 0$

Donc forcément $l = 0$ et $x_n \to z$.