

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\cdot \Gamma(n+1) = n! \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

$$\cdot \forall x, y > 0, t \mapsto t^{x-1} (1-t)^{y-1} \text{ est}$$

une fonction intégrable sur $]0,1[$

$$\text{On pose } g_{x,y}(t) = t^{x-1} (1-t)^{y-1}$$

La fonction est positive. Supposons que $x \leq y$

$$\int_{]0,1[} |g| = \int_{]0,1[} g = \int_{]0,1[} t^{x-1} (1-t)^{y-1}$$

$$\leq \int_{]0,1[} t^{x-1} (1-t)^{x-1}$$

$$x-1 \leq y-1$$

car $s \mapsto (1-t)^s$ est décroissante sur $]0,1[$

$$(1-t) > 0$$

$$\leq \int_{]0,1[} (t(1-t))^{x-1}$$

On remarque que la fonction $t(1-t)$ est majorée par $1/4$ sur $[0;1] \dots$ à compléter

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

A km)

2. $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ intégrale de Boole

$$= \int_{\partial \mathbb{D}^+} t^{x-1} (1-t)^{y-1} \frac{dt}{d\lambda(t)}$$

$$I = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)} ds dt \quad \leftarrow d\lambda(s) d\lambda(t)$$

Changement de variables: $u = t$
 $v = t+s$

$$\phi: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathcal{U}$$

$$\phi(A, s) = (t, A+st)$$

$$\phi \text{ est } \mathcal{C}^1\text{-difféable} \quad J\phi(t, s) = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$U = \left\{ (u, v) \text{ avec } u \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } v > u \right\}$$

$$v = u + s \text{ avec } s > 0$$

$$I = \int_{\phi^{-1}(U)} \underbrace{u^{x-1} s^{y-1} e^{st}}_{f \circ \phi} dt ds \quad \begin{array}{l} u = t \\ v = t+s \Rightarrow s = v-u \end{array}$$

Changement de variable

$$= \int_U u^{x-1} (v-u)^{y-1} e^{-v} du dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-v} \left(\int_{]0; v[} u^{x-1} (v-u)^{y-1} du \right) dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-v} \left(\int_{]0; v[} u^{x-1} v^{y-1} \left(1 - \frac{u}{v}\right)^{y-1} du \right) dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-v} v^{y-1} \left(\int_{]0; v[} u^{x-1} (1-u/v)^{y-1} du \right) dv$$

On pose $\psi:]0; v[\rightarrow]0; 1[$ $\psi(u) = u/v$
 $u \mapsto u/v$ $u = vw$

ψ est $\mathcal{C}^1$ -diffé. de déterminant jaco. $1/v$ det. jaco

$$= \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-v} v^{y-1} \left(\int_{]0; 1[} (vw)^{x-1} (1-w)^{y-1} v dw \right) dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-v} v^{y-1} v^x \left(\int_{]0; 1[} w^{x-1} (1-w)^{y-1} dw \right) dv$$

$$\stackrel{4}{=} B(x, y) \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-v} v^{x+y-1} dv = B(x, y) \Gamma(x+y)$$

3.

$$I = \int_{R_x^* \times R_y^*} A^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)} ds dt$$

$$= \int_{R_x^* \times R_y^*} A^{x-1} e^{-t} \times s^{y-1} \times e^{-s} dt ds$$

$$= \int_{R_x^*} A^{x-1} e^{-t} \left(\int_{R_y^*} s^{y-1} e^{-s} ds \right) dt$$

" $\Gamma(y)$

$$= \Gamma(y) \int_{R_x^*} A^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x) \Gamma(y)$$

" $\Gamma(x)$

Done

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$