Exo $\quad d(x,y) = |x-y|$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$$

1. $\delta(x,y) = |f(x) - f(y)|$ Montrer que δ est une distance

- $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ clair
- $\delta(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)|$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f(z)|}_{\delta(x,z)} + |f(z) - f(y)|$$

$$\delta(x,z) + \delta(y,z)$$

- $\delta(x,y) = 0$ ssi $x = y$?

$\Leftarrow$ clair

$\Rightarrow$ Supposons $\delta(x,y) = 0$ d'où $f(x) = f(y)$

- Si $x,y \in \mathbb{Q}$: $f(x) = x$ et $f(y) = y$ donc $x = y$
- Si $x,y \notin \mathbb{Q}$: $f(x) = 1-x$ et $f(y) = 1-y$ donc $x = y$
- Si $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}$: $f(x) = x$ et $f(y) = 1-y$

(dernier cas est similaire)

d'où $y = 1 - x \in \mathbb{Q}$ Contradiction

Conclusion : δ est une distance

2. Calculer $\lim\limits_{\delta} \frac{\sqrt{2}}{n}$?

Remarque : pour la distance classique, on a

$$\lim \frac{\sqrt{2}}{n} = 0$$

On montre que $\lim\limits_{\delta} \frac{\sqrt{2}}{n} = 1$

On considère $\delta(1, \sqrt{2}/n) = |f(1) - f(\sqrt{2}/n)|$ $\sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$= \left|1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{2}}{n}\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \right)$$

$$\delta(a, \sqrt{2}/n) = |f(a) - f(\sqrt{2}/n)| \longrightarrow |f(a) - 1|$$

Exo : $\phi \in \overleftarrow{\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}}$

$$\phi(u) = \int_0^1 x\,u(x)\,dx$$

- $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$

Comparer $|\phi(u)|$ et $\|u\|_\infty$

$$|\phi(u)| = \left|\int_0^1 x\,u(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 x\,\underbrace{|u(x)|}_{\leq \|u\|_\infty}\,dx$$

$$\leq \|u\|_\infty \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\|u\|_\infty$$

d'où $\forall u, u \neq 0, \quad \dfrac{|\phi(u)|}{\|u\|_\infty} \leq 1/2$

d'où $|||\phi||| \leq 1/2$

On cherche u tel que $|\phi(u)| = \frac{1}{2}\|u\|_\infty$