Exo $\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 0} x(n)^2 < +\infty \right\}$ fini

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n\geq 0} x(n)^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)| < +\infty$$

1. Montrer que ce sont des normes

Le seul point difficile est l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$

On prend $N \geq 0$. On a Cauchy-Schwarz

$$\left[\sum_{n=0}^{N} x(n) \cdot y(n) \right]^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{N} x(n)^2 \right) \left(\sum_{n=0}^{N} y(n)^2 \right)$$

d'où $$\sum_{n=0}^{N} (x(n) + y(n))^2 = \sum_{n=0}^{N} x(n)^2 + \sum_{n=0}^{N} y(n)^2 + 2 \sum_{n=0}^{N} x(n) y(n)$$

$$\leq \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$+ 2 \left| \sum_{n=0}^{N} x(n) y(n) \right|$$

$$\overset{CS}{\leq} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} x(n)^2} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N} y(n)^2}$$

$$+ 2 \left(\sum_{n=0}^{N} x(n)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N} y(n)^2 \right)^{1/2}$$

$$\overset{IR}{=} \left(\left(\sum_{n=0}^{N} x(n)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=0}^{N} y(n)^2 \right)^{1/2} \right)^2$$

puis on prend la racine carrée et on fait $N \to +\infty$

2. $\forall x \in \ell^2(\mathbb{R})$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$

Puisque $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, la suite $(|x(n)|)$ est majorée

donc le sup est un max. Donc il existe n_0 tel

que $\|x\|_\infty = |x(n_0)|$ et donc

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n\geq 0} x(n)^2 = x(n_0)^2 + \underbrace{\sum_{n\neq n_0} x(n)^2}_{\geq 0}$$

$$\geq \|x\|_\infty^2$$

3. (x_k) $(k\in\mathbb{N})$ avec $x_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n\leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a $\|x_k\|_\infty = 1$

et $\|x_k\|_2^2 = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1 \leadsto \|x_k\|_2 = \sqrt{k+1}$

Si les normes sont équivalentes, il existe $C>0$ telle que $\forall x\in l_2(\mathbb{R})$, on a $\|x\|_2 \leq C\|x\|_\infty$ mais ceci est faux pour $x = x_k$ si on prend $k \geq C^2$. Donc les normes ne sont équivalentes

Exo. $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ $A = \{ f \in E \mid f(0) = 0 \}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)| \qquad \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$\boxed{p=1}$

1. A fermé pour $(E, \|\cdot\|_\infty)$ (cf. suite du cours)

On considère $T : E \to \mathbb{R}$ défini par $T(f) = f(0)$.

Alors T est continue pour $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Soit $f \in E$ et $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f$ alors $T(f_n) \to T(f)$

On montre ce point : on a $\sup_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où $\forall x \in [0;1]$, $f_n(x) \to f(x)$ et donc $f_n(0) \to f(0)$

$T(f_n) \to T(f)$

Propriété : T continue : $\forall F$ fermé de $\mathbb{R}$

alors $T^{-1}(F)$ est fermé

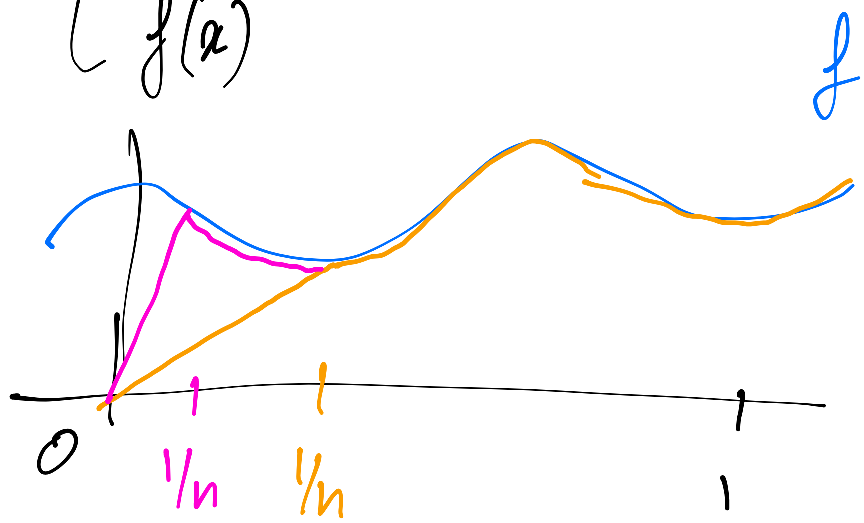
Or $A = T^{-1}(\{0\})$ donc c'est un fermé.

On a montré en fait que $\bar{A} = A$.

2. Soit $f \in E$. On pose

$$f_n(x) = \begin{cases} f(1/n)\, nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ f(x) & \end{cases}$$

$n \geq 1$



(a) $f_n \in A$? $0 \leq 1/n \quad \forall n \geq 1$

d'où $f_n(0) = f(1/n) . n . 0 = 0$

Il faut vérifier d'abord que $f_n \in E$, càd f_n continue sur $[0;1]$. Elle est continue sur $[0;1/n[$ et $]1/n;1]$

et on vérifie $\lim\limits_{\substack{x \to 1/n \\ x < 1}} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 1/n} f_n(x) = f_n(1/n)$.

$x < 1/n \qquad x > 1/n$

donc on a bien $f_n \in A$

(b) $$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx = \int_0^{1/n} + \underbrace{\int_{1/n}^1}_{=0}$$

$$= \int_0^1 |f(1/n)\,nx - f(x)|\,dx$$

$$\leq |f(1/n)|\,n \int_0^{1/n} x\,dx + \int_0^{1/n} \underbrace{|f(x)|}_{\leq \|f\|_\infty}\,dx$$

$$\leq \underbrace{|f(1/n)|}_{\leq \|f\|_\infty} . n . \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/n} + \|f\|_\infty \times \frac{1}{n}$$

$$\leq \|f\|_\infty \times \cancel{n} \times \frac{1}{2n^{\cancel{2}}} + \|f\|_\infty \times \frac{1}{n} = \frac{3}{2n}\|f\|_\infty$$

3. $\underbrace{\overline{A}}_{\text{pour } \|.\|_1} = E$?

On a $f_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

et $\|f_n - f\|_1 \leq \frac{3}{2n} \|f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc pour tout $f \in E$, il existe (f_n) suite d'éléments de A qui converge vers f donc $f \in \bar{A}$ (pour la norme $\|.\|_1$)

donc $\bar{A} = E$. (A n'est pas fermé pour $\|.\|_1$
car $A \neq E$)

Pour $\|.\|_\infty$, on a $\bar{A} = A$

4. $\mathring{A}$ pour $\|.\|_\infty$?

$f \in \mathring{A}$ ssi $\exists r > 0$ tel que $B_\infty(f, r) \subseteq A$

Soit $r > 0$, on considère la fonction

$g(x) = f(x) + r/2$ alors $g \in B_\infty(f, r)$

et $g \notin A$ ($g(0) = r/2 \neq 0$)

donc $\mathring{A} = \emptyset$

C'est pareil pour $\|\cdot\|_1$ avec la même fonction g

$g \in B_1(f, r)$ et $g \notin A$