

Exercice

1. $B_f(x, r)$ est fermé

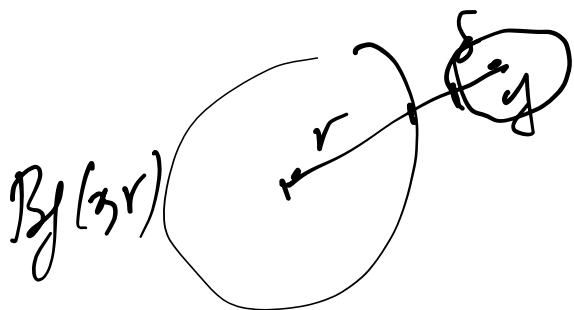
U
 n

On montre que $B_f(x, r) = B_f(x, r)^c = X \setminus B_f(x, r)$
est ouvert. C'est ouvert si $\forall y \in U$, il existe $\delta > 0$

tel que $B(y, \delta) \subseteq U$. Soit $y \in U$ donc $y \notin B_f(x, r)$

donc $d(x, y) > r$, disons $d(x, y) = r + \delta$ où $\delta > 0$.

On prend $s = \delta/2$ et on vérifie que $B(y, s) \subseteq U$



Autre démonstration : on montre que $\overline{B_f(x, r)} = B_f(x, r)$
d'où $B_f(x, r)$ est fermé

Soit $y \in \overline{B_f(x, r)}$ donc il existe une suite (y_n) d'éléments
de $B_f(x, r)$ telle que $\lim y_n = y$. Donc $\forall \varepsilon > 0$,
 $\exists N \geq 0$ tel que $\forall n \geq N$, $d(y, y_n) < \varepsilon$,

$$\text{d'où } d(x, y) \leq \underbrace{d(x, y_n)}_{\leq r} + \underbrace{d(y_n, y)}_{< \varepsilon} < r + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Il suit $d(x, y) \leq r$ et $y \in B_f(x, r)$.

2. $\overline{B(x, r)}$ est le plus petit fermé contenant $B(x, r)$
mais $B_f(x, r)$ est un fermé contenant $B(x, r)$
d'où $\overline{B(x, r)} \subseteq B_f(x, r)$

Idem pour l'intérieur

3. X EUn de norme $\|\cdot\|$

On montre que $B_f(x, r) = \overline{B(x, r)}$. Il suffit de

montrer $B_f(x, r) \subseteq \overline{B(x, r)}$. Soit $y \in B_f(x, r)$,

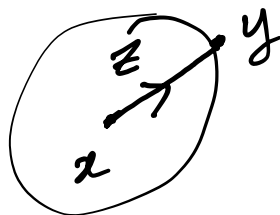
on montre qu'il existe (y_n) avec $y_n \in B(x, r)$

avec $\lim y_n = y$. On pose $z = \overbrace{y - x}^{(x - y?)}$ et pour $n \geq 1$,

on pose $y_n = y + \frac{1}{n} z$. On montre que $\|x - y_n\| < r$

et que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N = r/\varepsilon$ tel que $\forall n \geq N$,

$$\|y - y_n\| \leq \varepsilon.$$



3. $X = \{x, y\}$ d distan trivial
 $x \neq y$

$$B(x, 1) = \{x\}$$

$$B(y, 1) = \{x, y\}$$

$$\overline{B(x, 1)} = \{x\}$$