

μ mesure de comptage sur $[0;1]$

$$1. \Delta = \{ (x, x) \mid x \in [0;1] \}$$

Δ borélien de $\mathbb{R}^2$
— $[0;1]^2$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{continue et} \quad \Delta = f^{-1}(\{0\})$$

$(x, y) \mapsto x - y$

↙

mesurable

$\cap [0;1]^2$
↙
mesurable

$$2. \quad \mathbb{I}_1 = \int_{[0;1]} \left(\int_{[0;1]} \chi_{\Delta}(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$

$$\int_{[0;1]} \chi_{\Delta}(x, y) \, d\lambda(x) = \int_{[0;1]} \chi_{\{y\}} \, d\lambda(x)$$

$$= \lambda(\{y\}) = 0$$

de an $I_1 = \int_{(0,1)} 0 \, d\mu(x) = 0$

$$I_2 = \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} \chi_{\Delta}(x,y) \, d\mu(y) \right) d\lambda(x)$$

$= \chi_{\{x\}}(y)$

On a $\int_{(0,1)} \chi_{\Delta}(x,y) \, d\mu(y) = \mu(\{x\}) = 1$

et $I_2 = \int_{(0,1)} d\lambda(x) = 1$

On a $I_1 \neq I_2$

Fubini ne s'applique car la mesure produit n'existe pas car μ n'est pas σ -finie