$f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ sur $]0; +\infty[$

1.. f intégrable sur $]0; +\infty[$?

Il faut montrer $\displaystyle\int_{]0;+\infty[} \left| \frac{\sin x}{e^x - 1} \right| < +\infty$

critère du cours

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{e^x - 1} \right| dx < +\infty$

On a $|\sin x| \leq x$ pour $x \geq 0$ (1)

$\boxed{e^x - 1 \geq x}$ pour $x \geq 0$ (2)

$e^x - 1 \geq e^{x-1}$ pour $x \geq 2$ (3)

$|\sin(x)| \leq 1$

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{e^x - 1} \right| dx \leq \int_0^{2} \frac{x}{e^x - 1} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1} dx$$

(1)

$$\leq \int_0^{2} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} dx$$

(2) (3)

$$\leq 2 + e^{-1}$$

2. Montrer $\forall x > 0$, $f(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-nx} \sin(x)$

et pour $x = 0$?

Pour $x > 0$, $0 < e^{-x} < 1$ donc $\dfrac{1}{1 - e^{-x}} = \sum_{n \geq 0} \left(e^{-x}\right)^n$

$$= \sum_{n \geq 0} e^{-nx}$$

or $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1} = \dfrac{\sin(x)}{e^x(1 - e^{-x})}$

$$= \frac{\sin(x)}{e^x} \sum_{n \geq 0} e^{-nx} = \sin(x) \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)x}$$

$$= \sum_{n \geq 1} e^{-nx} \sin(x)$$

Pour $x = 0$, on a $\sum_{n \geq 1} e^{-n0} \cdot \sin(0) = 0$

et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\cos x}{e^x} = 1$

3. En deduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\,dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+1}$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}\,dx = \int_{]0;+\infty[} \frac{\sin x}{e^x - 1}\,dx$ par ce dessus

$\displaystyle = \int_{]0;+\infty[} \left(\sum_{n \geq 1} \sin x \, e^{-nx} \right) dx$

(1). $\forall n \geq 1$, $\sin x \, e^{-nx}$ intégrable

si

(2). $\displaystyle\sum_n \int |\sin x \, e^{-nx}| < +\infty$

alors $\displaystyle\int_{]0;+\infty[} f = \sum \int_{]0;+\infty[} \sin x \, e^{-nx}\,dx$

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x) e^{-nx}| dx = \int_0^{+\infty} |\sin(x)| e^{-nx} dx$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx$$

$$\underset{\text{ipp}}{\leqslant} \frac{1}{n^2}$$

donc on a bien (1)

De plus $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2 < +\infty$ donc (2)

D'où on a bien $\int_{]0;+\infty[} f = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin x \, dx$

On calcule $\int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin x \, dx$

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin x = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{ix-nx}}_{= e^{(i-n)x}} dx \right)$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{1}{i-n} e^{(i-n)x}\right]_0^{+\infty} = \dots = \frac{1}{n^2+1}$$

Conclusion $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+1}$

$y \geq 0 \qquad F(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}\, dx$

1. F continue sur $\mathbb{R}^+$
   - Riemann $\to$ Lebesgue $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}\, dx < +\infty$
   - Appliquer le théorème $|\cdot| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ intégrable

2. Calculer $F(0)$ et $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} F(y)$

$F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi/2$

$$\lim_{y \to +\infty} F(y) = \lim_{n \to +\infty} F(n) = \int n$$

$$\lim_{y \to +\infty} \int_{[0;+\infty[} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} \, dx = \int \Big(\underbrace{\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}}_{\substack{\| \\ 0 \text{ pp}}} \Big) dx$$

$$= 0$$

3. F dérivable (cf. cours)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} \right) = \frac{-x^2}{1+x^2} e^{-x^2 y} \ldots$$

4. $$F'(y) = \int_{]0;+\infty[} \frac{-x^2}{1+x^2} e^{-x^2 y} \, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1-(1+x^2)}{1+x^2} e^{-x^2 y} \, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2y}}{1+x^2}\,dx - \int_0^{+\infty} e^{-x^2y}\,dx$$

chgt de variable

$z = x\sqrt{y}$ $(y>0)$

$$F'(y) = F(y) - \frac{1}{\sqrt{y}} I$$

avec $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

on résoud

5. $F(y) = I \int_y^{+\infty} \frac{e^{y-t}}{\sqrt{t}}\,dt$

6. $F(0) = I \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = I \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2}\,du$

chgt $u = \sqrt{t}$

d'où $\underset{I}{F(0)} = 2I^2$ d'où $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\pi/2$