$$f : [0; \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } \cos(x) \in \mathbb{Q} \\ \sin^2(x) & \text{si } \cos(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. f mesurable ? f intégrable ?
borélienne ?

- cos et sin sont continues donc boréliennes
- $\chi_{\mathbb{Q}}$ est borélienne (car $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ donc $\mathbb{Q}$ borélien)

car $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ union dénombrable de boréliens

$\chi_{\mathbb{Q}}(\cos(x))$

On a $$f(x) = \sin(x) \left(\chi_{\mathbb{Q}} \circ \cos \right)(x) + \sin^2(x) \left(1 - \chi_{\mathbb{Q}} \circ \cos \right)(x)$$

d'où f est borélienne.

- f est intégrable ? $$\int_{[0;\pi/2]} |f| \leq \int_{[0;\pi/2]} 1 = \frac{\pi}{2}$$

donc f est intégrable

2. Calculer $\int_{[0;\pi/2]} f(x)\, d\lambda(x)$

On a $\{x \mid \cos(x) \in \mathbb{Q}\} = \cos^{-1}(\mathbb{Q})$

$$= \underbrace{\pm \arccos(\mathbb{Q})}_{\text{dénombrable}} + \underbrace{2\pi\mathbb{Z}}_{\text{dénombrable}}$$

donc c'est dénombrable donc de mesure nulle

donc $f(x) = \sin^2(x)$ pp.

d'où $\displaystyle\int_{[0;\pi/2]} f = \int_{[0;\pi/2]} \sin^2(x) \underset{\sin^2(x) \text{ continue sur } [0;\pi/2]}{=} \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\, dx \underset{\text{à faire}}{=} \dots = \frac{\pi}{4}$