1. G groupe, H sous-groupe d'indice 2

Montrer $H \triangleleft G$

$\operatorname{Card} G/H = 2$

$\Updownarrow$ Th

$\operatorname{Card} H \backslash G$

$G/H = \{\underline{H}, \underline{C}\}$ $\longrightarrow$ $C = G \setminus H$

$H \backslash G = \{H, C'\}$ $\longrightarrow$ $C' = G \setminus H$

On a $C = C'$

Soit $g \in G$, on montre $gH = Hg$ ($\Leftrightarrow gHg^{-1} = H$)

- Si $g \in H$ alors $gH = H$ et de même $Hg = H$
- Si $g \notin H$ alors $gH = C$ et $Hg = C'$

d'où $gH = Hg$

Conclusion: $H \triangleleft G$

---

2. G fini d'ordre n, p le plus petit premier diviseur n

H d'indice p dans G. On montre $H \triangleleft G$

G agit sur G/H : $g \cdot xH = gxH$

2.1 Action transitive :

xH et yH dans G/H, il existe $g \in G$ tel que

$$g \cdot xH = yH$$
$$\shortparallel$$
$$gxH$$

on prend $g = yx^{-1}$

2.2 K noyau action. Montrer $K \subseteq H$

$g \in K$: $\forall x \in G$, $g \cdot xH = xH$

En particulier $g \cdot H \in H$ $(x = e)$

c'est-à-dire $\forall h \in H$, $gh \in H$

d'où $h = e$, $g \in H$

2.3 Montrer G/K iso sous-groupe de S_p

Action de G sur G/H donne une action de G/K sur G/H : $\bar{g} \cdot xH = gxH$

C'est une action $\boxed{\text{fidèle}}$

$G/H = \{C_1, .., C_p\}$

On définit $G/K \xrightarrow{\Phi} S_p$ avec $\bar{g} \cdot C_i = C_{\pi_{\bar{g}}(i)}$

$\bar{g} \mapsto \pi_{\bar{g}}$

morphisme injectif

d'où par factorisation $G/K \simeq \mathrm{Im}\,\Phi$

sous-groupe de S_p

2.4. Supposons ~~que $H \neq K$~~

~~donc $K \subsetneq H$~~. On a $|G/K|$ divise $p!$

(par 2.3)

or $|G/K| = \dfrac{|G|}{|K|} = \dfrac{|G|}{|H|} \times \dfrac{|H|}{|K|} = p \times a$

avec a l'indice de K dans H.

On a $pa \mid p!$ d'où $a \mid (p-1)!$

Si $a \neq 1$, il existe q premier avec $q \mid a$,

On a $q < p$ puisque $q \mid (p-1)!$

et $q \mid |G|$ <u>contradiction</u>

donc $a = 1$: $|K| = |H|$ et donc $K = H$

Comme $K \triangleleft G$ car c'est le noyau $\rightsquigarrow$ $H \triangleleft G$.