# Topologie des espaces métriques

1. Espaces métriques
2. Fonctions continues
3. Compacité
4. Connexité
5. Complétude

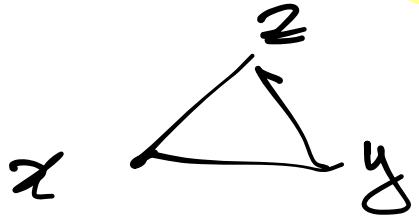
# §1.1 Topologie – Espaces métriques

## Définition

Une distance sur un ensemble $X$ est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. (séparation) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
2. (symétrie) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$
3. (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$(X, d)$ est un espace métrique




## Définition

Une norme sur un espace vectoriel $X$ (sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) est une fonction $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

$\lambda \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$

1. (séparation) $\forall x \in X$, $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$
2. (homogénéité) $\forall x \in X$, $\forall \lambda$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
3. (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(X, \| \cdot \|)$ est un espace normé

vectoriel

**Résultat.** Soit $(X, d)$ espace métrique,

$$\forall x, y, z \in X, \quad |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

## Théorème

*Soit $(X, \|\cdot\|)$ espace normé alors $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur $X$*

## Exemples

1. $\mathbb{R}^n$ avec la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
2. La distance discrète sur tout ensemble $X$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Définition

Deux distances $d_1$ et $d_2$ sur $X$ sont Lipschitz-équivalentes s'il existe $m, M > 0$ tels que

$$\forall x, y \in X, \quad m\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq M\, d_1(x, y)$$

## Définition

Soit $(X, d)$ espace métrique. Pour $x \in X$ et $r \geq 0$, on pose

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad \text{(boule ouverte)}$$
$$B_f(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \quad \text{(boule fermée)}$$

Une partie $A$ de $X$ est bornée si il existe $M \geq 0$ tel que $\forall a, a' \in A$, $d(a, a') \leq M$, c'est équivalent à demander que $A$ est contenue dans une boule. Pour $A \subset X$, une partie bornée, on définit son diamètre par

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a, a') : a, a' \in A\}$$

## Proposition

*Soit $(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ espaces métriques. Alors on peut définir les deux distances suivantes sur $X \times Y$*

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$
$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

*La distance $d_\infty$ est la distance produit*

*Résultat. Ces deux distances sont Lipschitz-équivalentes*

## Définition

Une partie $A$ d'un espace métrique $(X, d)$ est un ouvert si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$. Le complémentaire d'un ouvert est un fermé.

**Résultat.** Une boule ouverte est un ouvert et une boule fermée est un fermé.

## Théorème

*Si $d_1$ et $d_2$ sont Lipschitz-équivalentes sur $X$ alors les ouverts de $(X, d_1)$ sont exactement les ouverts de $(X, d_2)$.*

## Théorème

*La famille des ouverts de $(X, d)$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Toute union (arbitraire) d'ouverts est un ouvert*
2. *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert*

*(Un énoncé équivalent en découle pour les fermés)*

union finie de fermés et fermée

## Définition

La topologie d'un espace métrique $(X, d)$ est l'ensemble des ouverts de $X$. Si $A$ est une partie de $X$, la topologie induite est celle donnée par la restriction de $d$ à $A \times A$.

" $\{U \cap A$ avec $U$ ouvert de $X\}$

Si $(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ sont des espaces métriques, la topologie produit de $X \times Y$ est celle donnée par la distance $d_\infty$ (max. entre $d_X$ et $d_Y$)

topologie engendrée par $U \times V$, $U$ ouvert de $X$, $V$ ouvert de $Y$

## Définition

Une base de la topologie de $(X, d)$ est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de $X$ telles que : tout élément de $\mathcal{B}$ est ouvert et tout ouvert (non vide) de $X$ est union (arbitraire) d'éléments de $\mathcal{B}$

**Résultat.** Les boules ouvertes forment une base de la topologie de $(X, d)$

## Définition

Un espace métrique est séparable s'il admet une base de topologie au plus dénombrable

## Définition

Soit $(x_n)$ une suite d'éléments d'un espace métrique $(X, d)$. On dit $(x_n)$ converge vers $\ell \in X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N, \ d(x_n, \ell) \leq \epsilon$$

**Résultat.** La limite, si elle existe, est unique

## Définition

Une suite extraite d'un suite $(x_n)$ d'éléments de $X$ est une suite de la forme $(x_{f(n)})$ où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante (et donc $\forall n$, $f(n) \geq n$).

## Théorème

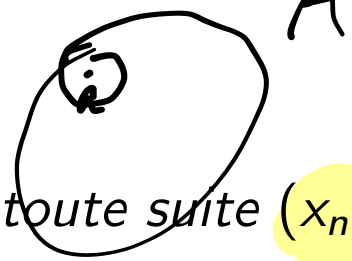
*Toute suite de réels admet une sous-suite monotone.*

## Définition

Soit $(x_n)$ une suite d'éléments d'un espace métrique $(X, d)$. On dit que $x \in X$ est valeur d'adhérence de $(x_n)$ si, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $N \geq 0$, $\exists n \geq N$ avec $x_n \in B(x, \epsilon)$. C'est équivalent à dire qu'il existe une sous-suite extraite de $(x_n)$ qui converge vers $x$.

## Théorème

*Une partie $A$ de l'espace métrique $X$ est ouverte ssi pour toute suite $(x_n)$ d'éléments de $X$ qui converge vers un élément de $A$, $\exists N \geq 0$ tel que $\forall n \geq N$, on a $x_n \in A$*




## Théorème

*Une partie $A$ de l'espace métrique $X$ est fermée ssi pour toute suite $(x_n)$ convergente d'éléments de $A$, la limite est dans $A$*

## Définition

Soit $A$ une partie de l'espace métrique $X$. L'intérieur de $A$, noté $A^\circ$, est le plus grand ouvert contenu dans $A$. L'adhérence de $A$, noté $\bar{A}$, est le plus petit fermé contenant $A$. $A$ est dense dans $X$ si $\bar{A} = X$. La frontière de $A$, noté $\delta A$, est $\delta A = \bar{A} \setminus A^\circ$

**Résultat.** On a $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$ ; $A^\circ = A$ ssi $A$ est ouvert ; $\bar{A} = A$ ssi $A$ est fermé.

## Théorème

*On a $x \in \bar{A}$ ssi $\forall U$ ouvert contenant $x$, $U \cap A \neq \emptyset$ ssi il existe une suite d'éléments de $A$ convergeant vers $x$*

## Boules ouvertes, boules fermées

Soit $(X, d)$ un espace métrique. Soient $x \in X$ et $r$ un réel strictement positif. On note $B(x, r)$ (resp. $B_f(x, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre $x$ et de rayon r.

1. Montrer que la boule fermée $B_f(x, r)$ est un fermé de $X$.
2. Montrer que l'adhérence de $B(x, r)$ est incluse dans $B_f(x, r)$ et que l'intérieur de $B_f(x, r)$ contient $B(x, r)$.
3. On suppose dans cette question que $X$ est un espace vectoriel normé, muni d'une norme $\| \|$. Montrer que les inclusions précédentes sont en fait des égalités.
4. Donner un exemple d'un espace métrique $(X, d)$ pour lequel les résultats de la question 3. sont faux.

## Définition

Pour $p \in [1, +\infty]$, on définit la norme $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

et la norme $\|\cdot\|_\infty$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

**Résultat.** L'inégalité triangulaire pour ces normes est l'inégalité de Minkowski

## Théorème

*Soient $p, q \in [1, +\infty]$. Les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire il existe $m, M > 0$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, m\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq M\|x\|_p$$

*et donc les distances correspondantes sont Lipschitz-équivalentes*

## Normes sur $\ell^2$

On note

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} x(n)^2 < \infty \right\}$$

et pour $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, on pose

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x(n)^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|.$$

1. Montrer que $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont des normes sur $\ell^2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.
3. Les normes $\| \cdot \|_\infty$ et $\| \cdot \|_2$ sont-elles équivalentes ?
   (Indication. considérer la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$ définie par : $x_k(n) = 1$ si $n \leq k$ et $x_k(n) = 0$ sinon.)

## Normes sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$

On note $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et $A = \{f \in E : f(0) = 0\}$. On rappelle la définition des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur $E$ :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} \|f(x)\|, \quad |f|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

1. Montrer que $A$ est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Soit $f \in E$. On définit pour tout $n \geq 1$,

$$f_n : [0;1] \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(1/n)\, nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

   2.1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in A$.
   2.2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|f_n - f\|_1 \leq \frac{3}{2n}\|f\|_\infty.$$

3. Montrer que $A$ est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
4. Déterminer l'intérieur de $A$ pour $\|\cdot\|_\infty$ puis pour $\|\cdot\|_1$.

# §1.2 Fonctions continues

## Définition

Une fonction $f : X \to Y$ est continue en $x \in X$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall x' \in X,\ d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

$f$ est continue sur $A \subseteq X$ si $f$ est continue en $x$ pour tout $x \in A$

$f$ est uniformément continue sur $A \subseteq X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in A,\ d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

## Remarque

*Définition de continuité :* $\delta = \delta_{x,\epsilon}$

*Définition de continuité uniforme :* $\delta = \delta_\epsilon$

## Définition

Soit $K > 0$. Une fonction $f : X \to Y$ est $K$-lipschitzienne $\in X$ si

$$\forall x, x' \in X,\ d_Y(f(x), f(x')) \leq K\, d_X(x, x')$$

**Résultat.** Lipschitzienne $\implies$ uniformément continue $\implies$ continue

## Théorème (Autre caractérisation de la continuité)

*Soit $f : X \to Y$.*

- *$f$ est continue en $x \in X$ ssi pour tout suite $(x_n)$ suite d'éléments de $X$ de limite $x$, on a $\lim_n f(x_n) = f(x)$ (caractérisation séquentielle)*
- *$f$ est continue sur $X$ ssi pour tout ouvert $U$ de $Y$, on a $f^{-1}(U)$ ouvert de $X$ (caractérisation topologique)*

  *Remarque. vérifier pour $U$ dans une base d'ouverts de $Y$ est suffisant*

**Résultat.** La composée, la somme, la multiplication de fonctions continues est continue

**Résultat.** Deux fonctions continues qui coïncident sur un ensemble dense sont égales

## Théorème

*Soit $f : X \to Y \times Z$ (avec le distance $d_\infty$). On note $f = (f_Y, f_Z)$. Alors $f$ est continue ssi $f_Y$ et $f_Z$ sont continues*

## Définition

Soient $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $a \in \bar{A}$ et $b \in B$. On dit que $f$ tend vers $b$ quand $x$ tend vers $a$ ou la limite de $f$ en $a$ est $b$, noté $\lim_{x \to a} f(x) = b$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A,\ 0 < d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), b) < \epsilon$$

**Résultat.** On a $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ssi $\lim_{n} f(x_n) = b$ pour tout suite $(x_n)$ de limite $a$ avec $x_n \neq a$ $\forall n$

**Résultat.** $f$ est continue en $a$ ssi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

## Théorème (Prolongement par continuité)

*Soit $A \subseteq X$ et $f : A \to Y$. Soit $c \in \bar{A} \setminus A$ tel que $\lim_{x \to c} f(x)$ existe. On définit $g : A \cup \{c\} \to Y$ par*

$$g(x) = f(x) \text{ si } x \in A \quad \text{et} \quad g(c) = \lim_{x \to c} f(x).$$

*Alors, $g$ est continue en $c$.*

## Définition

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de $X$ vers $Y$ et soit $f : X \to Y$.

- $(f_n)$ converge simplement vers $f$ si $\forall x \in X, \lim_n f_n(x) = f(x)$, ie

  $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0$ tel que $\forall n \geq N,\ d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$

  ← dépend de $\epsilon$ et de $x$

- $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ si

  $\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0$ tel que $\forall x \in X, \forall n \geq N,\ d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$

  ← dépend que de $\epsilon$

## Théorème

*Soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues de $X$ vers $Y$ qui converge uniformément vers $f : X \to Y$. Alors, $f$ est continue.*

## Théorème

*Soit $f : X \to Y$ une application linéaire entre deux evn (espaces vectoriels normés) alors $f$ est continue ssi $f$ est continue en 0 ssi $f$ est lipschitzienne ssi $\exists M > 0, \forall x \in X, \|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$.*

*Dans ce cas, le plus petit $M$ qui convient est la norme subordonnée de $f$, dénotée $|||f|||$.*

← $|||f|||$.

## Théorème

*Soit $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ (= ensemble des applications linéaires continues), on a*

- $\forall x \in X,\ \|f(x)\|_Y \leq |||f||| \cdot \|x\|_X$
- $$|||f||| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|f(x)\|_Y = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|f(x)\|_Y$$
- *Soit $g \in \mathcal{L}(Y, Z)$, on a $|||g \circ f||| \leq |||g||| \, |||f|||$*

## Résultat.

$\mathcal{L}(X, Y)$ avec la norme $|||\cdot|||$ est un evn

## Définition

Un homéomorphisme entre deux espaces métriques $f : X \to Y$ est une bijection telle que $f$ et $f^{-1}$ sont continues. Dans ce cas, on dit que $X$ et $Y$ sont homéomorphes.

## Limite pour une distance particulière

Soit $d$ la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $d(x,y) = |x-y|$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Montrer que l'application $\delta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

est une distance sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n \geq 1}$ pour cette distance.

## Calcul de normes d'applications linéaires.

1. On considère l'application linéaire $\phi : \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(u) = \int_0^1 x\, u(x)\, dx.$$

   Calculer la norme de $\phi$ pour $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

   Même question avec la norme $\| \cdot \|_1$.

2. On considère l'application linéaire $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(P) = P'(0).$$

   Calculer la norme de $\psi$ pour $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sup_{x \in [0;1]} |P(x)|$.

# §1.3 Compacité

## Définition

Soit $(X, d)$ un espace métrique.

- Propriété de Borel-Lebesgue. Soit $(U_i)_{i\in I}$ des ouverts de $X$ tels que $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ (recouvrement d'ouverts), il existe $I_0 \subseteq I$ fini tel que $\bigcup_{i\in I_0} U_i = X$.
- Propriété de Bolzano-Weierstrass. Tout suite d'éléments de $X$ admet une sous-suite convergente.

## Théorème

*Ces deux propriétés sont équivalentes pour un espace métrique. Un espace avec ces propriétés est un espace compact*

**Résultat.** Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés

**Résultat.** Soit $X$ un espace compact et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de $X$. Alors il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in X$, $\exists i \in I$ avec $B(x, r) \subseteq U_i$

## Proposition

- *Un sous-espace compact d'un espace métrique est fermé*
- *Une intersection arbitraire de compacts est compacte*
- *Une union finie de compacts est compacte*
- *Un fermé d'un espace compact est compact*

## Théorème

1. **Borne atteinte.** *Soit $X$ compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f$ est bornée et elle atteint ses bornes. De plus, $f$ est uniformément continue (aussi vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $Y$ métrique).*
2. **Riesz.** *Soit $E$ un evn. Alors, $E$ est de dimension finie ssi $B_f(0,1)$ est compacte.*
3. **Produit de compacts**. *Le produit de deux espaces compacts avec la distance produit est un espace compact*

## Proposition

*Soit $n \geq 1$, alors toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ (resp. sur $\mathbb{C}^n$) sont équivalentes*

# §1.4 Connexité

## Définition

Soit $(X, d)$ un espace métrique. On dit que $X$ est connexe si, pour tout ouvert $U$ et $V$ avec $X = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$, on a $(U, V) = (X, \emptyset)$ ou $(\emptyset, X)$.

## Proposition

- *$X$ est connexe ssi les seuls ouverts-fermés sont $X$ et $\emptyset$*
- *$X$ est connexe ssi toute fonction continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante*
- *L'image d'un connexe par une fonction continue est connexe*
- *Soit $A \subseteq X$ connexe et $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ alors $B$ connexe*
  *En particulier, l'adhérence d'un connexe est connexe*
- *Le produit de deux espaces connexes est connexe*

## Théorème (Connexité dans $\mathbb{R}$)

*Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. En conséquence, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et si $I$ est un intervalle, alors $f(I)$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires)*

## Définition

Soit $x \in X$ espace métrique. La composante connexe $C(x)$ de $x$ est la réunion des connexes de $X$ contenant $x$. C'est le plus grand connexe contenant $x$. En particulier, $C(x)$ est fermé.

**Résultat.** On utilise : une union (arbitraire) de connexes d'intersection non vide est connexe

## Théorème

*Soient $x, y \in X$. Alors $C(x) = C(y)$ ou $C(x) \cap C(y) = \emptyset$. En particulier, $X$ est l'union (disjointe) de composantes connexes.*

## Définition

Un chemin reliant $x$ à $y$ avec $x, y \in X$ espace métrique est une application $\gamma : [0;1] \to X$ continue avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. (On peut remplacer $[0;1]$ par un intervalle arbitraire $[a;b]$)
On dit que $X$ est connexe par arcs si, $\forall x, y \in X$, il existe un chemin reliant $x$ et $y$

**Résultat.** Connexe par arcs $\implies$ connexe

**Résultat.** L'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs

## Application

*Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes*

## Théorème

*L'adhérence de l'ensemble $\{(t, \sin(1/t)) : t \in ]0;1]\}$ est compact, connexe mais pas connexe par arcs*

# §1.5 Complétude

## Définition

Un suite $(x_n)$ d'un espace métrique $X$ est une suite de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n, m \geq N$, on a $d(x_n, x_m) < \epsilon$
On dit que $X$ est complet si toute suite de Cauchy de $X$ est convergente

**Résultat.** Suite convergente $\implies$ suite de Cauchy

**Résultat.** Suite de Cauchy avec une sous-suite convergente est convergente (même limite)

## Théorème

- *Tout fermé d'un espace complet est complet*
- *Tout sous-espace complet est fermé*
- *Tout espace métrique compact est complet*
- *Tout evn de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet*

## Proposition

*L'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ avec $X$, $Y$ evn et $Y$ complet, munit de la norme subordonnée $|||\cdot|||$ est complet*

## Théorème (Riesz-Fischer)

*Soit $p \in [1; +\infty]$. Alors $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ est un evn complet avec*

$$\|(u_n)\|_p = \begin{cases} \left(\sum_n |u_n|^p\right)^{1/p} & \text{si } p < +\infty \\ \sup_n |u_n| & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

*et $\ell^p(\mathbb{N}) = \{$suites réelles $(u_n)$ avec $\|(u_n)\|_p < +\infty\}$.*

## Théorème

*Soit $X$ un espace métrique, il existe un unique (à isométrie près) complété $Y$ de $X$ vérifiant $X \subseteq Y$, $d_X$ restriction de $d_Y$ à $X$, $Y$ complet et $X$ dense dans $Y$.*

## Théorème (Prolongement des fonctions unif. continues)

*Soient $X$ et $Y$ deux espaces métriques avec $X$ complet. Soient $S \subseteq X$, une partie dense de $X$, et $f : S \to Y$ une application uniformément continue. Alors, il existe un unique prolongement de $f$ par continuité de $X$ vers $Y$.*

Rappel Les applications linéaires continues sont uniformément continues.

## Théorème (Point fixe des applications contractantes)

*Soit $X$ un espace métrique. Une application $f : X \to X$ est contractante s'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que*

$$\forall x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y).$$

*Supposons que $X$ est complet et $f : X \to X$ est contractante, alors elle admet un unique point fixe $x_* \in X$ avec $f(x_*) = x_*$. De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite $(x_n)$ avec $x_{n+1} = f(x_n)$ tend vers $x_*$ géométriquement, c'est-à-dire*

$$\forall n \geq 0, \quad d(x_n, x_*) \leq \alpha^n\, d(x_0, x_*).$$

## Une version faible du théorème de Picard.

Soit $(X, d)$ un espace métrique compact et soit $f : X \to X$ une fonction telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$.

1. Montrer que $f$ admet au plus un point fixe.
2. Montrer qu'il existe $z \in X$ tel que $d(z, f(z)) \leq d(x, f(x))$ pour tout $x \in X$.
3. Montrer que $z$ est l'unique point fixe de $f$.
4. Soit $x_0 \in X$. On définit une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$.
   Montrer que la suite $(d(x_n, z))_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \geq 0$
5. Montrer que $\ell = 0$ et donc que $(x_n)$ converge vers $z$.