Université Claude Bernard Lyon 1 Licence de mathématiques, 3ème année.

Octobre 2024. Partiel de *Topologie des espaces métriques*. Durée 2 heures

Question de cours. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f\colon X \to Y$ et $a \in X$. Démontrer que f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X, telle que pour tous éléments $a \neq b$ de A, on a $d(a, b) \geq 1$. Déterminer $\overline{A}$.

Exercice 2. On considère $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie pour $(x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ par $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

On note respectivement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$ les sous-espaces vectoriels des suites convergentes et des suites convergentes vers 0, et on munit ces deux sous-espaces vectoriels de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour toute suite (x_n) dans $\mathcal{C}$, on pose

$$T\big((x_n)\big) = (y_n), \qquad \text{où} \quad \begin{cases} y_0 = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k \\ y_n = x_{n-1} - \lim\limits_{k\to+\infty} x_k, \quad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

1. Justifier que T définit une application linéaire de $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathcal{C}_0$.
2. Montrer que T est continue et calculer la norme subordonnée de T.
3. Montrer que T est bijective de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_0$.
4. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$ sont homéomorphes.

Exercice 3. On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et un ensemble $C \subset E$, tel que

i) C est convexe : $\forall x, y \in C$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, on a $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$,
ii) C est borné,
iii) $0 \in \overset{\circ}{C}$,
iv) $-C = C$. $\big($On note ici $-C \overset{\text{def}}{=} \{-x \colon x \in C\}$.$\big)$

On définit l'application $f\colon E \to \mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \inf\left\{t > 0 \colon \frac{x}{t} \in C\right\}.$$

1. Laquelle des hypothèses i)–iv) permet de dire que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\left\{t > 0 \colon \frac{x}{t} \in C\right\}$ est non vide ? Justifier. Conclure que f est bien définie.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in E$, $f(-x) = f(x)$.
   (b) Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in E$, on a $f(\lambda x) = \lambda\, f(x)$.
   (c) Conclure que : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, x \in E$, $f(\lambda\, x) = |\lambda|\, f(x)$.
3. Soient x_1, $x_2 \in E$ et $t_1, t_2 > 0$, tels que $\dfrac{x_1}{t_1} \in C$ et $\dfrac{x_2}{t_2} \in C$. Montrer que $\dfrac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} \in C$.
   En déduire l'inégalité triangulaire : $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$.
4. Montrer que f est une norme sur E.
5. Démontrer les inclusions
$$\{x \in E \colon f(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in E \colon f(x) \leq 1\}.$$
6. Dans cette question on suppose de plus que C est ouvert. Démontrer que $C = \{x \in E \colon f(x) < 1\}$.