

Année universitaire : 2024/2025

Diplôme : L3 Mathématiques générales

Epreuve : Topologie

Date : 25/10/2024

Nom (de jeune fille pour les femmes mariées) et prénoms : Welschinger Emilie

Numéro de la carte d'étudiant : 121215448

Signature : [Signature]

NOTE :

20

Numéro à reporter sur les intercalaires : 0691809

Nombre d'intercalaires : 2

Question de cours :

" $\Rightarrow$ " Supposons f continue en a , et considérons $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \rightarrow a$. Soit $\varepsilon > 0$, $B_y(f(a), \varepsilon)$ est un voisinage de $f(a)$ donc par continuité de f en a , $V = f^{-1}(B_y(f(a), \varepsilon))$ est un voisinage de a dans X donc il existe un ouvert $U \subset V$ tel que $a \in U \subset V$. Comme U est un ouvert, $\exists \eta > 0$ tel que $B_x(a, \eta) \subset U \subset V = f^{-1}(B_y(f(a), \varepsilon))$ donc $\forall x \in B_x(a, \eta)$, $f(x) \in B_y(f(a), \varepsilon)$. Comme $x_n \rightarrow a$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $x_n \in B_x(a, \eta)$ donc $\forall n \geq N$, $f(x_n) \in B_y(f(a), \varepsilon)$ donc $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

" $\Leftarrow$ " : Supposons que pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \rightarrow a$ on a $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Par l'absurde, supposons que f n'est pas continue en a . $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0 \exists x \in X$ tel que $d_x(x, a) < \eta$ et $d_y(f(x), f(a)) > \varepsilon$. En particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in X$ tel que $d_x(x_n, a) < \frac{1}{n+1}$ et $d_y(f(x_n), f(a)) > \varepsilon$. Comme $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, $d_x(x_n, a) \rightarrow 0$ donc $x_n \rightarrow a$ mais $d_y(f(x_n), f(a)) > \varepsilon$ donc $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$.

or puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $d_y(f(x_n), f(b)) > \varepsilon$, $f(x_n) \not\rightarrow f(b)$
d'où la contradiction.

Donc f est continue en a .

Ainsi f est continue en $a \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ telle que $x_n \xrightarrow{h \rightarrow \infty} a$
on a $f(x_n) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} f(a)$

exercice 1:

On a toujours $A \subset \bar{A}$. Montrons que $\bar{A} \subset A$:

Soit $x \in \bar{A} \setminus A$, il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A^*$ telle que
 $x_n \xrightarrow{h \rightarrow \infty} x$ donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Posons $\varepsilon = 1$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < 1$

or $x_n, x_m \in A$ donc $d(x_n, x_m) \geq 1$ dès que $x_n \neq x_m$.

Ainsi $\forall n, m \geq N$, $x_n = x_m = x$ par passage à la limite,
donc $x \in A$ absurde. Donc $A \setminus A = \emptyset$ et $\bar{A} = A$.

exercice 2:

1/ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x_n), (x'_n) \in \mathbb{C}$,

$$T(\lambda x_n + x'_n) = y_n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \lim_{h \rightarrow \infty} (\lambda x_h + x'_h) \\ y_n = (\lambda x_{n-2} + x'_{n-2}) - \lim_{h \rightarrow \infty} (\lambda x_h + x'_h) \text{ par } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{ie } \begin{cases} y_0 = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \lim_{k \rightarrow \infty} x_k' \\ y_n = (\alpha_{n-1} - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k) + (\beta_{n-1} - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k') \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{ie } \begin{cases} y_0 = \lambda T(x_0) + T(x_0') \\ y_n = \lambda T(x_n) + T(x_n') \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi on a } T(\lambda x_n + x_n') = \lambda T(x_n) + T(x_n')$$

donc T est linéaire.

En ailleurs : $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n-1} - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n-1} - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$
 $= 0 \text{ (car } (\alpha_n) \in C \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n-1} - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$
 $= 0$

Ne présumez pas qu'elle est nulle !

Ainsi, T définit une application linéaire de C dans C .

2/ Soit $(x_n) \in C$,

$$\|T(x)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n|$$

$$\begin{aligned} \text{or } |y_n| &\leq |\alpha_{n-1}| + |\lim_{k \rightarrow \infty} x_k| \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq \|x\|_\infty + \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| \text{ (car l.l. est continue)} \\ &\leq 2\|x\|_\infty \end{aligned}$$

d'où $\|T(x)\|_\infty \leq 2\|x\|_\infty$ donc T est continue par caractérisation de la continuité des applications linéaires.

De plus, par l'inégalité établie on a $\|T\| \leq 2$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, posons la suite $x: n \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } n \leq N \\ -1 \text{ si } n > N \end{cases}$

$$\|x\|_\infty = 1$$

$$\text{et } \|T(x)\|_\infty = \alpha_{N-1} - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 2.$$

$$\text{donc on a } \|T\| \geq 2 \text{ d'où } \|T\| = 2.$$

3/ Injectivité: Soit $x_n, x'_n \in \mathbb{C}$ tel que $y_n = T(x_n) = T(x'_n)$.

$$\text{donc } \begin{cases} y_0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} x'_k \\ y_n = x_{n-1} - \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x'_{n-1} - \lim_{k \rightarrow +\infty} x'_k \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} x'_k \text{ et } \forall n \geq 1, x_{n-1} = x'_{n-1}$$

donc $\forall n \geq 0, x_n = x'_n$ d'où l'injectivité

• Surjectivité: Soit $(y_n) \in C_0$.

$$\text{Posons } x: n \mapsto y_{n+1} + y_0 \quad \forall n \geq 1.$$

$$(x)_n \in \mathbb{C} \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{n+1} + \lim_{n \rightarrow +\infty} y_0 = y_0 \text{ (car } (y_k)_k \in C_0)$$

$$\begin{aligned} \text{et } T(x_n) &= \begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k \text{ si } n=0 \\ x_{n-1} - \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k \text{ si } n \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} y_0 \text{ si } n=0 \\ x_{n-1} - y_0 \text{ si } n \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} y_0 \text{ si } n=0 \\ y_n \text{ si } n \geq 1 \end{cases} \\ &= (y_n) \end{aligned}$$

d'où la surjectivité

Ainsi T est bijective de C sur C_0

4/ L'application est bijective et continue de $C \rightarrow C_0$,
 sa bijection réciproque est $T^{-1}: C_0 \rightarrow C$

$$y_n \mapsto x: n \mapsto y_{n+1} + y_0$$

T^{-1} est linéaire: Soit $\lambda \in \mathbb{R}, y_n \in C_0, z_n \in C_0$,

Intérêt: T bijective et linéaire

$$T^{-1}(\lambda y_n + z_n) = (x_n) \text{ ou } x: n \mapsto \lambda y_{n+1} + z_{n+1} + \lambda y_0 + z_0.$$

donc $x: n \mapsto \lambda(y_{n+1} + y_0) + z_{n+1} + z_0$.

on a donc $T^{-1}(\lambda y_n + z_n) = \lambda T^{-1}(y_n) + T^{-1}(z_n)$

T^{-1} est continue: Soit $y_n \in C_0$,

$$\|T(y)\|_\infty = \|x\|_\infty \leq 2\|y\|_\infty \text{ donc par caractérisation}$$

de la continuité des applications linéaire, T^{-1} est continue.
Ainsi, T est un homéomorphisme de C dans C_0 ,
donc C et C_0 sont homéomorphes

16

exercice 3:

2/ L'hypothèse (iii) garantit que $\forall \epsilon \in E \setminus \{0\}, \frac{x}{\epsilon} \in C$
est non vide, en effet, $0 \in E$ donc $\exists \epsilon > 0$ telle que
 $B(0, \epsilon) \subset C$, Soit $\frac{x}{n} \in E, \quad \left\| \frac{x}{n} \right\| = \frac{\|x\|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N, \left\| \frac{x}{n} \right\| < \epsilon$ donc $\frac{x}{n} \in C$
donc en particulier $N \in \{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\}$.

$\{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\}$ est un ensemble non vide ^{de $\mathbb{R}^+$} minoré par N
donc il possède une borne inférieure.

Ainsi f est bien définie

$$\begin{aligned} 2/a.) \text{ Soit } x \in E, \\ f(-x) &= \inf \{t > 0 : -\frac{x}{t} \in C\} \\ &= \inf \{t > 0 : \frac{x}{t} \in -C\} \\ &= \inf \{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\} \text{ (par (iv))} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$

b.) Soit $\lambda > 0$ et $x \in E$, soit $t \in \{t > 0 : \frac{\lambda x}{t} \in C\}$.

alors $\frac{x}{\frac{t}{\lambda}} \in C$ donc $\frac{t}{\lambda} \in \{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\}$

donc par passage à la borne inférieure,
 $f(x) \leq \frac{t}{\lambda}$ d'où $\lambda f(x) \leq t$

d'où par passage à la borne inférieure
 $\lambda f(x) \leq f(\lambda x)$

en remplaçant λ par $\frac{1}{\lambda}$ et x par $\frac{1}{x}$
on a de même $\frac{1}{\lambda} f(\frac{1}{x}) \leq f(\frac{1}{x})$ d'où $f(\frac{1}{x}) \leq \lambda f(\frac{1}{x})$

Enfinement, $\forall \lambda > 0$ et $\forall x \in E$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

c.) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, si $\lambda > 0$ alors d'après b) $f(\lambda x) = \lambda f(x) = |\lambda| f(x)$

si $\lambda = 0$, $f(0) = f(0) = 0$ car $0 \in C$ donc
 $\forall x > 0$, $\frac{0}{x} \in C$ donc $f(\lambda x) = |\lambda| f(x) = 0$.

si $\lambda < 0$: $-\lambda > 0$ et $f(\lambda x) = f(-\lambda x)$ d'après a).
 $= -\lambda f(x)$ d'après b)
 $= |\lambda| f(x)$

Ainsi: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$

3/. Soit $x_1, x_2 \in E$, $h_1, h_2 > 0$ tels que $\frac{x_1}{h_1} \in C$ et $\frac{x_2}{h_2} \in C$

alors $\frac{h_1}{h_1+h_2} \frac{x_1}{h_1} + \frac{h_2}{h_1+h_2} \frac{x_2}{h_2} \in C$ car C est convexe par (i)

$\frac{h_1}{h_1+h_2} + \frac{h_2}{h_1+h_2} = \frac{h_1+h_2}{h_1+h_2} = 1$ donc $\frac{h_1}{h_1+h_2} \frac{x_1}{h_1} + \frac{h_2}{h_1+h_2} \frac{x_2}{h_2}$

est une combinaison barycentrique de deux éléments de

ainsi $\frac{x_1}{h_1+h_2} + \frac{x_2}{h_1+h_2} \in C$ de $\boxed{\frac{x_1+x_2}{h_1+h_2} \in C}$

• Soit $x_1, x_2 \in E^2$, si $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$
on a clairement $f(x_1+x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$
(on a déjà montré que $f(0) = 0$).
supposons donc $x_1, x_2 \in E \setminus \{0\}$

Montrons $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) > 0$:

par écart de si $f(x_1) = 0$, par caractérisation
séquentielle de la borne inférieure, $\exists h_n \in \mathbb{N}$
tel que $h_n \rightarrow 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{x_1}{h_n} \in C$

on aurait alors $\left\| \frac{x}{h_n} \right\| = \frac{\|x\|}{h_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

Ce qui est absurde puisque $\forall n \in \mathbb{N} \frac{x}{h_n} \in C$ qui est borné d'après (ii)

~~De plus, C est fermé : en effet soit $x \in C$, $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$, $\forall n \in \mathbb{N} (1 - \frac{1}{n})x_n + \frac{1}{n}x \in C$ d'après (i) (puisque C est convexe).
d'où par passage à la limite~~

Soit $h_1 \in \{h > 0; \frac{x_1}{h} \in C\}$ et $h_2 \in \{h > 0; \frac{x_2}{h} \in C\}$.

on a montré que $\frac{x_1 + x_2}{h_1 + h_2} \in C$

donc $h_1 + h_2 \in \{h > 0; \frac{x_1 + x_2}{h} \in C\}$

d'où par passage à la borne inférieure

$$f(x_1 + x_2) \leq h_1 + h_2$$

d'où $f(x_1 + x_2) - h_2 \leq h_1$ donc $f(x_1 + x_2) - h_2$ est un minorant de $\{h > 0; \frac{x_1}{h} \in C\}$ donc par définition de la borne inférieure (le plus grand minorant,

$$f(x_1 + x_2) - h_2 \leq f(x_1)$$

$$\text{d'où } f(x_1 + x_2) - f(x_1) \leq h_2$$

et par le même argument $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$

Ainsi, $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$

4/ $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ (valeurs dans $\mathbb{R}_+$)

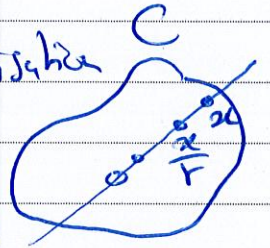
• Séparation: Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0$, on a
à montrer à la question précédente que si $x \neq 0$, $f(x) > 0$
donc $x = 0$ (grâce à l'hypothèse C borne)

• homogénéité: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$ d'après la
question 2/b.)

3. Théorème triangulaire: d'après la question précédente,
 $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$

Ainsi f est une norme sur E

5/ Soit $x \in \{x \in E : f(x) < 1\} \setminus \{0\}$
alors $\inf \{t > 0; \frac{x}{t} \in C\} < 1$ par caractérisation
séquentielle de la borne inférieure,
il existe $0 < t < 1$ tel que $\frac{x}{t} \in C$
 $x = t \frac{x}{t} + (1-t) \cdot 0 \in C$ (car $0 \in C$)
et C est convexe.



par ailleurs $0 \in C$

donc $\{x \in E : f(x) < 1\} \subset C$.

2. Soit $x \in C$, $1 \in \{t > 0; \frac{x}{t} \in C\}$

donc par passage à la borne inférieure,
 $\inf \{t > 0; \frac{x}{t} \in C\} \leq 1$ donc $f(x) \leq 1$.

Enfinement, $\{x \in E : f(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in E : f(x) \leq 1\}$
~~egalité~~

6/ D'après la question 5, $\{x \in E : f(x) < 1\} \subset C$.

Soit $x \in C$, comme nous avons trouvé
tel que $B(x, \epsilon) \subset C$.

par l'absurde, supposons que
 $f(x) \geq 1$

ie $\inf \{t > 0; \frac{x}{t} \in C\} \geq 1$, alors serait mesuré de façon
 $\forall t < 1$, $\frac{x}{t} \notin C$ absolument de la $t_1 < 0$.
donc $C = \{x \in E : f(x) < 1\}$

