Topologie des espaces métriques. Examen de session 1. Durée 2h. Décembre 2024

Le sujet comporte une première partie au recto et un problème au verso, à composer sur deux copies distinctes.

Partie à composer sur la copie N. 1

Question de cours. Soient (X_1, d_1) , (X_2, d_2) deux espaces métriques et $f : X_1 \rightarrow X_2$ une application. On suppose que l'image réciproque $f^{-1}(U)$ d'un ouvert quelconque U de X_2 est un ouvert de X_1 .

Démontrer que f est continue sur X_1 (au sens de la définition avec ε et δ).

Exercice 1. Dans cet exercice, $\mathbf{R}$ et l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sont munis de la métrique usuelle.

1. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et soit f une application uniformément continue de X vers Y . Montrer que pour toute suite de Cauchy $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans X , la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est également une suite de Cauchy.
2. On considère l'application g de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par $g(t) = t^3$. Montrer que g n'est pas uniformément continue mais que pourtant, pour toute suite de Cauchy $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $\mathbf{R}$, la suite $(g(t_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est également une suite de Cauchy.
3. On considère la bijection h de $\mathbf{R}$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ définie par $h(x) = \arctan x$. Montrer que h est uniformément continue, puis donner un exemple de suite de Cauchy $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ pour laquelle la suite $(h^{-1}(y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas une suite de Cauchy.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A et B deux parties non vides de E . On note

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

1. Montrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A + B$ est fermé
3. Montrer que si A et B sont connexes par arcs, alors $A + B$ est connexe par arcs.

Exercice 3. Soit $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Démontrer que si f est une contraction, alors g possède un point fixe. Donner ensuite un exemple illustrant que g peut admettre plusieurs points fixes.

Fin de la partie à composer sur la copie N. 1.

Le problème est à composer sur la copie N. 2

Problème. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X . On notera E l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels il existe une suite extraite de $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers x .

Première partie : Soit H une partie non vide de X . Pour tout $a \in X$, on note :

$$d(a, H) = \inf_{x \in H} [d(a, x)].$$

1. Justifier l'existence de l'inf écrit dans la définition ci-dessus.
2. Montrer que pour tous éléments a et b de X ,

$$d(a, H) \leq d(a, b) + d(b, H).$$

3. Montrer que l'application de X vers $\mathbf{R}^+$ qui associe à chaque élément a de X le réel $d(a, H)$ est une application continue de X vers $\mathbf{R}^+$.

Seconde partie : Dans cette partie, on suppose que

$$E \text{ est un compact non vide et } d(a_n, a_{n+1}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Soit F et G deux fermés de E disjoints et non vides.

4. Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall u \in F, \forall v \in G, d(u, v) \geq k$.
5. Soit $m \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $n_1, n_2 \in \mathbf{N}, m \leq n_1 < n_2$ tels que $d(a_{n_1}, F) < \frac{k}{3}$ et $d(a_{n_2}, G) < \frac{k}{3}$.
6. Justifier que $n_2 \in \{p \in \mathbf{N}, p > n_1 : d(a_p, F) \geq \frac{k}{3}\}$, qui n'est donc pas vide. On notera $L = \min\{p \in \mathbf{N}, p > n_1 : d(a_p, F) \geq \frac{k}{3}\}$.
7. Montrer que $d(a_L, G) \geq \frac{2}{3}k - d(a_L, a_{L-1})$.

On pose $K := \{y \in X : d(y, F \cup G) \geq \frac{k}{3}\}$.

8. Montrer que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe un entier $L > m$ tel que $a_L \in K$. En déduire qu'il existe une suite extraite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui prend toutes ses valeurs dans K .
9. Montrer que K est fermé dans X . Montrer que $K \cap E$ est compact.
10. Dans cette question on suppose que X est compact. Démontrer que $K \cap E$ est non vide. Conclure que E est connexe.

Fin du problème