Topologie des espaces métriques - Corrigé Examen Décembre 2024

Question de cours. Soient (X_1, d_1) , (X_2, d_2) deux espaces métriques et $f : X_1 \rightarrow X_2$ une application. On suppose que l'image réciproque $f^{-1}(U)$ d'un ouvert quelconque U de X_2 est un ouvert de X_1 .

Démontrer que f est continue sur X_1 (au sens de la définition avec ε et δ).

Solution : Soit $a \in X_1$. Montrons que f est continue au point a , c.à.d. que :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X_1, d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons dans X_2 , la boule ouverte $B_2(f(a), \varepsilon)$ de centre $f(a)$ et de rayon ε . Cette boule étant un ouvert de X_2 , par hypothèse $f^{-1}(B_2(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert de X_1 . Comme $f(a) \in B_2(f(a), \varepsilon)$, l'ouvert $f^{-1}(B_2(f(a), \varepsilon))$ contient a . Il existe donc $\delta > 0$ tel que la boule ouverte $B_1(a, \delta)$ de X_1 est incluse dans $f^{-1}(B_2(f(a), \varepsilon))$. Ainsi, $f(B_1(a, \delta)) \subseteq B_2(f(a), \varepsilon)$, c.à.d.

$$\forall x \in X_1, d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

ce qui termine la démonstration.

Exercice 1. Dans cet exercice, $\mathbf{R}$ et l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sont munis de la métrique usuelle.

1. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et soit f une application uniformément continue de X vers Y . Montrer que pour toute suite de Cauchy $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans X , la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est également une suite de Cauchy.

Solution : Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans X . Montrons que $(f(a_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans Y : soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de f , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2, d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon. \quad (*)$$

Comme $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans X , il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n, m \geq N, d_X(a_n, a_m) < \delta.$$

Soit $n, m \geq N$. Alors $d_X(a_n, a_m) < \delta$ et par $(*)$, $d_Y(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon$.

On a donc vérifié que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n, m \geq N d_Y(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon.$$

2. On considère l'application g de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par $g(t) = t^3$. Montrer que g n'est pas uniformément continue mais que pourtant, pour toute suite de Cauchy $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $\mathbf{R}$, la suite $(g(t_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est également une suite de Cauchy.

Solution : Soit $\delta > 0$. Posons $x = \frac{1}{\delta^2}$ et $y = x + \frac{\delta}{2}$. On a $|y - x| < \delta$ mais

$$y^3 - x^3 \geq x^3 + 3x \frac{\delta^2}{2} - x^3 \geq \frac{3}{4}. \text{ Ainsi, } g \text{ n'est pas uniformément continue.}$$

Soit $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$. Comme $\mathbf{R}$ est complet, cette suite converge. De plus, g étant une fonction polynomiale, l'application g est continue et ainsi la suite $(g(t_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est également convergente. Comme toute suite convergente est de Cauchy, la suite $(g(t_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est également de Cauchy.

3. On considère la bijection h de $\mathbf{R}$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ définie par $h(x) = \arctan x$. Montrer que h est uniformément continue, puis donner un exemple de suite de Cauchy $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ pour laquelle la suite $(h^{-1}(y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas une suite de Cauchy.

Solution : La bijection h est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Cette dérivée à valeurs positives étant majorée par 1, le théorème des accroissements finis entraîne que h est 1-lipschitzienne et donc uniformément continue.

Considérons maintenant la suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $y_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $h^{-1}(y_n) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$ et ainsi la suite $(h^{-1}(y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$. Cette suite ne peut être de Cauchy dans $\mathbf{R}$ car elle diverge et $\mathbf{R}$ est complet.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A et B deux parties non vides de E . On note

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

1. Montrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.

Solution : Supposons A ouvert. Soit $x \in A + B$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ est incluse dans A . Vérifions alors que la boule ouverte $B(x, r)$ est incluse dans $A + B$: soit $y \in B(x, r)$. Alors $\|y - x\| < r$ et, comme $y - x = y - (a + b) = (y - b) - a$, on a $\|(y - b) - a\| < r$. Ainsi, $y - b \in B(a, r) \subseteq A$, donc $y - b \in A$ et $y = (y - b) + b \in A + B$.

2. Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A + B$ est fermé

Solution : Supposons A compact et B fermé. On va montrer que $A + B$ est fermé en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés. Considérons pour cela une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $A + B$ qui converge vers $x \in E$. Montrons alors que $x \in A + B$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$ tel que $x_n = a_n + b_n$. Comme A est compact, il existe une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ de $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers un élément a de A . La suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge également vers x , la suite $(b_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $x - a$. Comme B est fermé, il suit que $x - a \in B$ et donc $x \in A + B$.

3. Montrer que si A et B sont connexes par arcs, alors $A + B$ est connexe par arcs.

Solution : Supposons A et B connexes par arcs. Soit $x_0 = a_0 + b_0$ et $x_1 = a_1 + b_1$ deux éléments de $A + B$ où a_0 et a_1 sont dans A , et b_0, b_1 dans B . Par hypothèse il existe deux applications continues $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow A$ et $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow B$ telles que $\gamma_1(0) = a_0, \gamma_1(1) = a_1, \gamma_2(0) = b_0$ et $\gamma_2(1) = b_1$. Considérons alors l'application $\gamma : [0, 1] \rightarrow A + B$ définie par $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$. Cette application est continue comme composée d'applications continues et $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. On a ainsi montré que $A + B$ est connexe par arcs.

Exercice 3. Soit $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Démontrer que si f est une contraction, alors g possède un point fixe. Donner ensuite un exemple illustrant que g peut admettre plusieurs points fixes.

Solution : f étant une contraction sur $\mathbf{R}$ qui est complet, f admet un unique point fixe $a \in \mathbf{R}$. Alors, $f(g(a)) = g(f(a)) = g(a)$. Ainsi, $g(a)$ est point fixe de f et par unicité du point fixe a de f , on a $g(a) = a$, c'est-à-dire a est également un point fixe de g .

Considérons l'exemple suivant : l'application contractante $x \mapsto \frac{x}{2}$ et l'application identité (ou l'application valeur absolue).

Problème. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X . On notera E l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels il existe une suite extraite de $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers x .

Première partie : Soit H une partie non vide de X . Pour tout $a \in X$, on note :

$$d(a, H) = \inf_{x \in H} [d(a, x)].$$

1. Justifier l'existence de l'inf écrit dans la définition ci-dessus.

Solution : H étant non vide, l'ensemble $\{d(a, x) : x \in H\}$ est non vide. Une distance étant à valeurs dans $[0, +\infty[$, l'ensemble $\{d(a, x) : x \in H\}$ est minoré par 0. Comme toute partie non vide de $\mathbf{R}$ minorée admet une borne inférieure, l'inf en question existe.

2. Montrer que pour tous éléments a et b de X ,

$$d(a, H) \leq d(a, b) + d(b, H).$$

Solution : Soit $x \in H$. La borne inférieure étant un minorant, on obtient, en utilisant l'inégalité triangulaire, que

$$d(a, H) \leq d(a, x) \leq d(a, b) + d(b, x)$$

et donc $d(a, H) - d(a, b) \leq d(b, x)$.

Ainsi, $d(a, H) - d(a, b)$ est un minorant de $\{d(b, x) : x \in H\}$ et, sa borne inférieure étant le plus grand des minorants, il suit que $d(a, H) - d(a, b) \leq d(b, H)$, ce qui permet de conclure.

3. Montrer que l'application de X vers $\mathbf{R}^+$ qui associe à chaque élément a de X le réel $d(a, H)$ est une application continue de X vers $\mathbf{R}^+$.

Solution : Par la question précédente (et par symétrie), on a

$$\forall (a, b) \in X^2 \quad |d(a, H) - d(b, H)| \leq d(a, b)$$

donc l'application $X \rightarrow \mathbf{R}^+$, $a \mapsto d(a, H)$ est 1-lipschitzienne et en particulier continue.

Seconde partie : Dans cette partie, on suppose que

$$E \text{ est un compact non vide et } d(a_n, a_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit F et G deux fermés de E disjoints et non vides.

4. Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall u \in F, \forall v \in G, d(u, v) \geq k$.

Solution : Comme F et G sont fermés non vides dans E qui est compact, ce sont également deux parties compactes non vides. Ainsi $F \times G$ est un compact non vide de X^2 . Comme la distance d est une application continue de X^2 dans $\mathbf{R}^+$ (voir cours), elle est bornée sur le compact $F \times G$ et atteint ses bornes. Il existe en particulier $(a, b) \in F \times G$ tel que pour tout $(u, v) \in F \times G$, on ait $d(a, b) \leq d(u, v)$. Comme F et G sont disjoints et $a \in F, b \in G$, on a $d(a, b) > 0$. En posant $k = d(a, b)$, on a alors $k > 0$ et $\forall u \in F, \forall v \in G, d(u, v) \geq k$.

5. Soit $m \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $n_1, n_2 \in \mathbf{N}, m \leq n_1 < n_2$ tels que $d(a_{n_1}, F) < \frac{k}{3}$ et $d(a_{n_2}, G) < \frac{k}{3}$.

Solution : Comme E est l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, si on considère $a \in F \subseteq E$ et $b \in G \subseteq E$, il existe deux sous-suites $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(a_{\psi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ qui convergent respectivement vers a et b . Il existe alors N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(a_{\varphi(n)}, a) < \frac{k}{3}$ et $d(a_{\psi(n)}, b) < \frac{k}{3}$.

Posons $n_1 = \varphi(\max(m, N))$ et $n_2 = \psi(\max(n_1 + 1, N))$. Par stricte croissance de φ et ψ , on a $n_1 \geq \max(m, N) \geq m$ et $n_2 \geq \max(n_1 + 1, N) > n_1$. Ainsi, $m \leq n_1 < n_2$. D'autre part, $d(a_{n_1}, F) \leq d(a_{n_1}, a) < \frac{k}{3}$ car $a_{n_1} = a_{\varphi(\max(m, N))}$ et $\max(m, N) \geq N$. De même, $d(a_{n_2}, G) < \frac{k}{3}$.

6. Justifier que $n_2 \in \{p \in \mathbf{N}, p > n_1 : d(a_p, F) \geq \frac{k}{3}\}$, qui n'est donc pas vide. On notera $L = \min\{p \in \mathbf{N}, p > n_1 : d(a_p, F) \geq \frac{k}{3}\}$.

Solution : On a $d(a_{n_2}, G) < \frac{k}{3}$. Il existe donc $v \in G$ tel que $d(a_{n_2}, v) \leq \frac{k}{3}$. Ainsi, par les questions 4 et 2, $k \leq d(v, F) \leq d(v, a_{n_2}) + d(a_{n_2}, F) \leq \frac{k}{3} + d(a_{n_2}, F)$ et donc $d(a_{n_2}, F) \geq \frac{2k}{3} \geq \frac{k}{3}$. Comme $n_2 > n_1$, on conclut.

7. Montrer que $d(a_L, G) \geq \frac{2}{3}k - d(a_L, a_{L-1})$.

Solution : Notons tout d'abord que $d(a_{L-1}, F) < \frac{k}{3}$. En effet, comme $L > n_1$, ou bien $L - 1 = n_1$ et l'inégalité est donnée par la question 5, ou bien $n_1 < L - 1 < L$ et donc par minimalité de L , on a cette inégalité.

Il existe alors $u \in F$ tel que $d(a_{L-1}, u) \leq \frac{k}{3}$. Comme $u \in F$, on a $d(u, G) \geq k$ par la question 4. Par la question 2, on a

$$d(a_L, G) \geq d(u, G) - d(a_L, u) \geq k - d(a_L, u).$$

Par inégalité triangulaire,

$$d(a_L, u) \leq d(a_L, a_{L-1}) + d(a_{L-1}, u) \leq d(a_L, a_{L-1}) + \frac{k}{3}.$$

Il suit que

$$d(a_L, G) \geq k - d(a_L, u) \geq k - \frac{k}{3} - d(a_L, a_{L-1}) \geq \frac{2}{3}k - d(a_L, a_{L-1}).$$

On pose $K := \{y \in X : d(y, F \cup G) \geq \frac{k}{3}\}$.

8. Montrer que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe un entier $L > m$ tel que $a_L \in K$. En déduire qu'il existe une suite extraite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui prend toutes ses valeurs dans K .

Solution : Soit $m \in \mathbf{N}$. Comme $d(a_n, a_{n+1}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on peut supposer m assez grand tel

que pour tout $n \geq m$, $d(a_n, a_{n+1}) < \frac{k}{3}$. On considère alors l'entier $L > m$ donné par la question 6. Ainsi, $d(a_L, F) \geq \frac{k}{3}$ et $d(a_L, G) \geq \frac{2}{3}k - d(a_L, a_{L-1}) \geq \frac{2}{3}k - \frac{k}{3} \geq \frac{k}{3}$. Or $d(a_L, F \cup G) = \min(d(a_L, F), d(a_L, G))$, ce qui permet de conclure que $a_L \in K$.

On en déduit que l'ensemble $\{n \in \mathbf{N} : a_n \in K\}$ est infini et donc qu'il existe une suite extraite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui prend toutes ses valeurs dans K .

9. Montrer que $K \cap E$ est compact.

Solution : On a vu à la question 3 que l'application $f : X \rightarrow \mathbf{R}^+$, $x \mapsto d(x, F \cup G)$ est continue. Comme $K = f^{-1}([\frac{k}{3}, +\infty[)$, la partie K est un fermé de X comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Ainsi, $K \cap E$ est un fermé du compact E , donc compact également.

10. Dans cette question on suppose que X est compact. Démontrer que $K \cap E$ est non vide. Conclure que E est connexe.

Solution : Par la question 8, il existe une suite extraite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui prend toutes ses valeurs dans K . Comme X est compact, il existe une suite extraite $(v_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ qui converge vers $\ell \in X$. Comme K est fermé dans X et $(v_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une suite à valeurs dans K , on a $\ell \in K$. De plus $(v_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ donc sa limite ℓ est un élément de E . Ainsi, $\ell \in K \cap E$.

Or $K \subseteq X \setminus (F \cup G)$, donc $\ell \in E \setminus (F \cup G)$. On vient de montrer que deux fermés disjoints non vides de E ne peuvent recouvrir E , donc E est connexe.