Feuille d'exercices n° 3
Continuité

Exercice 1. L'intervalle $[0,1]$ étant muni de sa distance usuelle, l'application $x \mapsto x^2$ est-elle lipschitzienne ? Et l'application $y \mapsto \sqrt{y}$?

Exercice 2. On munit $\mathbf{R}$ de la distance usuelle. Soit f une application dérivable de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. Montrer que f est lipschitzienne si et seulement si f' est bornée.

Exercice 3. On a vu (exercice 7 de la fiche 1) que sur $\mathbf{R}$, l'application $\delta : (x,y) \mapsto \dfrac{|y-x|}{1+|y-x|}$ est une distance, qui définit la même topologie que la distance usuelle d. Ces deux distances sont-elles topologiquement équivalentes ? Sont-elles Lipschitz-équivalentes ?

Exercice 4. Soit (X,d) un espace métrique et A une partie de X. On note χ_A la fonction caractéristique de A définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$.

1. Déterminer l'ensemble des points où χ_A est continue.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que χ_A soit continue.
3. Donner un exemple pour lequel χ_A est discontinue en tout point.

Exercice 5. Soit (X,d) un espace métrique, A une partie non vide de E et f une application continue de X vers $\mathbf{R}$. Montrer que $\sup\limits_{A} f = \sup\limits_{\overline{A}} f$.

Exercice 6. Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques et $f\colon X \to Y$. Montrer que f est continue sur X si et seulement si pour toute partie A de X, on a $f\big(\overline{A}\big) \subseteq \overline{f(A)}$.

Exercice 7. Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, et f une application de X vers Y. Montrer que si f est continue, alors son graphe (c'est-à-dire $\{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$) est fermé dans l'espace métrique $X \times Y$. Donner un exemple qui montre que l'implication réciproque n'est pas toujours vraie.

Exercice 8. Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels, et soit $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la forme linéaire définie par $\varphi(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. On munit $\mathbf{R}$ de la norme valeur absolue.
Montrer que φ est continue pour chacune des trois normes $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ et déterminer dans chacun des trois cas sa norme subordonnée.

Exercice 9. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$, qu'on munit de la norme $\|.\|_\infty$. On munit $\mathbf{R}$ de la norme valeur absolue.
Pour toute $u \in E$, on pose $\Psi(u) = \int_0^{1/2} u(t)\,dt - \int_{1/2}^1 u(t)\,dt$.

1. Montrer que Ψ est une forme linéaire continue sur E avec $|||\Psi||| \leqslant 1$.
2. Pour chaque $n \geqslant 3$, on note u_n la fonction continue qui vaut 1 sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, vaut -1 sur l'intervalle $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ et est affine sur l'intervalle $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$.
   En calculant (ou minorant) les $|\Psi(u_n)|$, montrer que $|||\Psi||| = 1$.

Exercice 10.
On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$. On munit $\mathbf{R}$ de la norme valeur absolue.
On considère sur E la forme linéaire φ définie par $\varphi(f) = f(0)$.
Montrer que selon qu'on munisse E de la norme $\|.\|_\infty$ ou de la norme $\|.\|_1$, la forme linéaire φ est continue ou discontinue.

Exercice 11.
On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$, qu'on munit de la norme $\|.\|_1$.
Pour toute $f \in E$ et tout x de $[0,1]$ on pose $(\mu(f))(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Montrer que μ est une application linéaire de E dans E, puis que μ est continue avec $|||\mu||| \leqslant 1$.
2. Pour chaque $n \geqslant 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$. Utiliser les fonctions f_n pour déterminer la norme de μ.

Exercice 12. On considère $F = \ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Dans cet exercice, il est commode de noter une suite réelle x de la façon suivante :

$$x : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ n \mapsto x(n).$$

On munit F de la norme $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} |x(n)|$.
Pour toute x dans F et tout n entier naturel, on pose $(\Delta(x))(n) = x(n+1) - x(n)$.
Montrer que Δ définit une application linéaire de F dans lui-même, puis montrer que Δ est continue et expliciter sa norme.

Exercice 13. L'application $t \mapsto \arctan t$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ est-elle uniformément continue ? Et l'application $\theta \mapsto \tan\theta$ de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbf{R}$? Et l'application $s \mapsto \sqrt{s}$ de $\mathbf{R}^+$ vers $\mathbf{R}$?

Exercice 14. Dans cet exercice et le suivant, les intervalles de $\mathbf{R}$ sont munis de la métrique usuelle et les parties de $\mathbf{C}$ de la métrique induite par la métrique usuelle sur $\mathbf{C}$.
Donner un exemple d'homéomorphisme entre :

1. Les intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$, où a, b, c et d sont quatre réels qui vérifient $a < b$ et $c < d$.
2. L'intervalle $]-1,1[$ et $\mathbf{R}$.
3. L'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ et le quart de cercle $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1, \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
4. L'ensemble $\mathbf{R}$ et le cercle épointé $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1, z \neq -1\}$. (La formule $f(t) = \dfrac{1+it}{1-it}$ est suggérée).

Exercice 15. Montrer que l'application définie par $f(\theta) = e^{i\theta}$ est une bijection continue de $[0, 2\pi[$ sur le cercle $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ mais n'est pas un homéomorphisme.

Exercice 16. Soit X un ensemble et soit d_1 et d_2 deux distances sur X. Montrer que les distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identique est un homéomorphisme entre (X, d_1) et (X, d_2).

Exercice 17. On munit $\mathbf{R}^2$ de la distance euclidienne usuelle, puis on définit φ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$ par :

$$\varphi(u) = \begin{cases} (0,0) & \text{si} \quad u = (0,0) \\ \dfrac{\|u\|_\infty}{\|u\|_2}\, u & \text{si} \quad u \neq (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que φ est bijective en exhibant son inverse.
2. Montrer que $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbf{R}^2$. En déduire que $u \mapsto \|u\|_\infty$ est continue puis que φ et φ^{-1} sont continues en tout point de $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
3. Montrer que φ et φ^{-1} sont continues en $(0,0)$.
4. Utiliser φ pour montrer que le carré $\{u \in \mathbf{R}^2 \mid \|u\|_\infty \leqslant 1\}$ et le disque $\{u \in \mathbf{R}^2 \mid \|u\|_2 \leqslant 1\}$ sont homéomorphes.