Feuille d'exercices n° 7

Connexité

Dans l'ensemble des exercices de la fiche, les espaces $\mathbf{R}^n$ sont munis d'une métrique issue d'une norme, et leurs sous-ensembles de la métrique induite.

Exercice 1.
On considère les parties suivantes de $\mathbf{R}^2$:

$$A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ |x| + |y| \leqslant 1\right\} \ ; \ A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ y = x^2 + 1\right\}.$$

On pose $A = A_1 \cup A_2$.

1. Dessiner A.
2. Montrer que A_1 est convexe, et que A_2 est connexe par arcs. Est-ce que A est connexe ?

Exercice 2.

1. Montrer qu'un espace métrique fini est connexe si et seulement si il est vide ou constitué d'un seul point.
2. Donner un exemple de deux sous-ensembles connexes d'un même espace métrique dont l'intersection est constituée de deux points, et donc pas connexe. *(On pourra penser à deux arcs inclus dans $\boldsymbol{R}^2$)*

Exercice 3.

1. Dans $\mathbf{R}^2$, montrer que tout cercle est connexe. En déduire que $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ est connexe, puis que $\mathbf{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}$ (muni de sa distance usuelle).
2. Plus généralement, soit E un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à 2 (éventuellement infinie). Montrer que toute sphère de E est connexe par arcs.

Exercice 4.
On considère les deux ensembles suivants :

$$U_+ = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 < 1, \, z > \sqrt{1-x^2-y^2}\} \quad \text{et} \quad U = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 < 1, \, |z| > \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

1. Que peut-on dire de U_+ et de $U\backslash U_+$? L'ensemble U est-il connexe ?
2. Montrer que U_+ est connexe par arcs.
Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout point $(x,y,z) \in U_+$, il existe un chemin entre (x,y,z) et $(x,y,2)$.
3. Montrer que $(1,0,0)$ est dans l'adhérence de U_+ et dans l'adhérence de $U\backslash U_+$.
4. En déduire que $U \cup \{(1,0,0)\}$ est connexe.

Exercice 5. On s'intéresse dans cet exercice à l'espace $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^*\}$.

1. Montrer que les seules parties connexes non vides de X sont ses parties à un seul élément.
2. En déduire un exemple de composante connexe non ouverte.

Exercice 6. Soit (X,d) un espace métrique et soit A une partie ouverte, fermée et connexe de X. Montrer que pour tout $a \in A$, A est égal à la composante connexe de X contenant a. En déduire que si A n'est pas vide, c'est une composante connexe de X. Quelles sont les composantes connexes de l'espace $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 1\}$?

Exercice 7. Soit (X,d) un espace métrique et soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de sous-ensembles connexes de X. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, les ensembles A_n et A_{n+1} ont au moins un point commun. Montrer que la réunion $\bigcup_{n\geqslant 0} A_n$ est connexe.

Exercice 8. Soit $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ une application continue entre deux espaces métriques. Soit A une partie connexe par arcs de (X,d_X). Montrer que $f(A)$ est une partie connexe par arcs de (Y,d_Y).

Exercice 9. (*Théorème du passage à la douane.*) Soit A et B deux parties d'un espace métrique (X,d). On suppose A connexe. Montrer que si A rencontre B et $X\backslash B$ alors A rencontre $\mathrm{Fr}(B) = \overline{B}\backslash\mathring{B}$ (la *frontière* de B).

Exercice 10. Soit $n \geqslant 1$. Dans cet exercice, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ d'une norme quelconque.

1. Montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbf{R})$ n'est pas une partie connexe de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Dans cette question, on va montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbf{C})$ est une partie connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
   (a) Soit $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbf{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Construire une application $\varphi : [0,1] \to \mathrm{GL_n}(\mathbf{C})$ continue telle que $\varphi(0) = I_n$, $\varphi(1) = A$.
   (b) Déduire de la question précédente que $\mathrm{GL_n}(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.
3. L'ensemble des matrices diagonalisables est-il ou non un sous-ensemble connexe par arcs de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

Exercice 11. Soit (X,d) un espace métrique. Pour $x,y \in X$ et $\varepsilon > 0$, on dit qu'il existe une ε-chaîne reliant x à y si l'on peut trouver un nombre fini de points de X, $x_0,\dots,x_n$ tels que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $d(x_i,x_{i+1}) \leqslant \varepsilon$ pour tout $i \in \{0,\dots,n-1\}$. On dit que (X,d) est *bien enchaîné* si, pour tout $\varepsilon > 0$, deux points quelconques de X sont reliés par une ε-chaîne.

1. (a) Soit $x \in X$ et $C(x,\varepsilon)$ l'ensemble des points de X que l'on peut relier à x par une ε-chaîne. Montrer que $C(x,\varepsilon)$ est à la fois ouvert et fermé.
   (b) Montrer qu'un espace métrique connexe est bien enchaîné. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit (X,d) un espace métrique non vide, compact et bien enchaîné. Montrer que X est connexe.

Exercice 12. Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$.

1. Montrer que si f est continue alors son graphe $\Gamma_f = \{(x,f(x)) : x \in [0,1]\}$, vu comme un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ muni de la métrique euclidienne, est connexe par arcs.
2. On suppose maintenant Γ_f connexe par arcs. On fixe $x \in [0,1]$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $[0,1]$ qui converge vers x, ainsi qu'un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \Gamma_f,\ t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ tel que $\gamma(0) = (0,f(0))$ et $\gamma(1) = (1,f(1))$. On a en particulier, pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma_2(t) = f(\gamma_1(t))$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $t_n \in [0,1]$ tel que $\gamma_1(t_n) = x_n$.
   (b) Montrer qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $(f(x_{\varphi(k)}))_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$.
   (c) En déduire que f est continue.
3. On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$, $g(0) = 0$. Montrer que le graphe de g est connexe mais que g n'est pas continue.