Feuille d'exercices n° 4

Espaces complets

Exercice 1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 2.

1. Étudier la complétude des parties suivantes de $(\mathbf{R}, |\cdot|)$: $[0,1]$, $]0,1]$, $[0,+\infty[$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$.
2. Donner un exemple explicite d'une suite de Cauchy dans $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$ qui ne converge pas dans $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$.

Exercice 3.

1. Donner un exemple d'un homéomorphisme entre deux espaces métriques, l'un étant complet et l'autre ne l'étant pas.
2. Montrer que s'il existe un homéomorphisme linéaire entre deux espaces normés et que l'un des deux est complet, l'autre l'est également.

Exercice 4. Soit (X,d) un espace métrique, et A une partie dense de X.
On suppose que toute suite de Cauchy constituée de points de A possède une limite dans X. Montrer que X est complet.

Exercice 5. Soit (X,d) un espace métrique complet. Soit (x_n) une suite de points de X et (r_n) une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note A_n la boule fermée de centre x_n et de rayon r_n.
On suppose d'une part, que $r_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, et d'autre part, que les A_n sont emboîtées au sens suivant : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$.

1. Montrer que (x_n) est une suite de Cauchy.
2. En notant x la limite de la suite (x_n), montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n = \{x\}$.

Exercice 6. Soit (X,d) un espace métrique. On suppose que X est complet, et on fixe une partie A dense dans X, ainsi qu'une application $f\colon A \to X$ qui est *isométrique*, c'est-à-dire telle que

$$\forall a, a' \in A \quad d(f(a), f(a')) = d(a, a') \ .$$

1. Soit $x \in X$.
   Montrer que pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x, la suite $\big(f(a_n)\big)$ est convergente dans X et que sa limite ne dépend pas du choix de la suite (a_n) convergeant vers x.
2. Montrer que f se prolonge de façon unique en une fonction continue $\tilde{f}\colon X \to X$, et que $\tilde{f}$ est isométrique.
3. Montrer que $\tilde{f}$ est surjective si, et seulement si, $f(A)$ est dense dans X.

Exercice 7.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite de fonctions définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}$.
   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction racine carrée sur $[0,1]$. Que peut-on en déduire sur $(\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$?
2. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$, on pose $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
   (a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$.
   (b) On considère une suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pour cette norme. Montrer que les suites $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(f'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent uniformément vers deux fonctions continues sur $[0,1]$ que l'on notera f et g respectivement.
   (c) Montrer que f est une primitive de g est conclure que $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ est complet.
3. Montrer que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.
   Indication : utiliser la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \inf(n, \frac{1}{\sqrt{x}})$.

Exercice 8. Dans cet exercice, on note $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites de réels, et on utilise la notation $x(n)$ plutôt que la notation x_n pour la valeur d'une suite (x_n) en l'entier n.
On note $\ell^1 = \{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \|x\|_1 \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| < \infty\}$ et $\ell^\infty = \{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \|x\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \sup_n |x(n)| < \infty\}$.

1. Montrer que $\ell^1 \subset \ell^\infty$, mais que ℓ^1 n'est pas une partie fermée de $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.
   Indication : on pourra considérer une suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de ℓ^1 qui convergent vers la suite x définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $x(n) = 1/(n+1)$.
   L'espace $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ est-il un espace de Banach ?
2. Soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.
   (a) Montrer que pour chaque $n \in \mathbf{N}$ la suite $(x_k(n))_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de réels, dont on notera $y(n)$ la limite.
   (b) Fixons $\epsilon > 0$ et considérons $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $\ell \geqslant k_0$, on ait $\|x_\ell - x_k\|_1 \leqslant \epsilon$.
   Fixons maintenant $k \geqslant k_0$.
      i. Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |y(n) - x_k(n)| \leqslant \epsilon$.
      ii. En déduire que $y \in \ell^1$ et que $\|y - x_k\|_1 \leqslant \epsilon$, puis conclure.

Exercice 9. *Théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert.*
Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On considère la norme associée $\|\cdot\|$: pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
On suppose que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace complet (on dit alors que E est un *espace de Hilbert*).
On rappelle l'identité du parallélogramme : pour tout $u, v \in E$,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

Soit C une partie convexe non vide et fermée de E. Soit $x \in E$.

1. Justifier que $\inf_{y\in C} \|x-y\|$ est bien défini. On note $\delta = \inf\limits_{y\in C} \|x-y\|$.
2. Montrer qu'il existe une suite $(c_n) \in C^{\mathbf{N}}$ telle que $\|x - c_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta$.
   On fixe une telle suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
3. Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy, et en déduire qu'il existe $c \in C$ tel que $\|x - c\| = \delta$.
   Indication : pour $n, m \in \mathbf{N}$, on pourra appliquer l'identité du parallélogramme avec $u = x - c_n$ et $v = x - c_m$.
4. Montrer qu'un tel $c \in C$ est unique.

Exercice 10. Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices réelles de taille $n \times n$ muni de la norme matricielle $|||\cdot|||$ subordonnée à la norme euclidienne.

1. Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Pour $A \in GL_n(\mathbf{R})$, montrer que $B\left(A, \dfrac{1}{|||A^{-1}|||}\right) \subset GL_n(\mathbf{R})$.