Feuille d'exercices n° 6

Espaces compacts

Exercice 1. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts dans $\mathbf{R}^2$ muni de la topologie usuelle :
— $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^4 \leqslant \cos(xy)\}$,
— $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 < xy \leqslant x^2 \leqslant 1\}$,
— $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 \leqslant xy \leqslant x^2 \leqslant 1\}$.

Exercice 2. Soit un entier $n \geqslant 2$ et l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices réelles de taille $n \times n$ ($\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel de dimension n^2). On note $|||\cdot|||$ la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$, c'est-à-dire, pour $M \in M_n(\mathbf{R})$,

$$|||M||| = \sup_{X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2}.$$

On considère l'ensemble des matrices orthogonales $O(n) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \colon {}^tAA = I_n\}$.

1. Soit $A \in O(n)$. Déterminer $|||A|||$.
2. Montrer que $O(n)$ est compact.
3. Étudier la compacité de l'ensemble $GL_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 3. On note E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$, qu'on munit de la norme $\|.\|_\infty$.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions dérivables de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ n'est pas un sous-ensemble compact de E.
2. Montrer que la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 n'est pas non plus un sous-ensemble compact de E. On pourra commencer par donner un exemple de suite (f_n) dans cette boule qui a une limite simple qui n'est pas une limite uniforme, puis s'appuyer sur cette suite.

Exercice 4. Montrer que l'intervalle $]0,1[$ n'est pas un sous-ensemble compact de $\mathbf{R}$ en donnant explicitement un exemple qui montre qu'il ne vérifie pas la propriété de Borel-Lebesgue.

Exercice 5. Soit X un ensemble muni de la distance discrète. Montrer que X est compact si et seulement si X est fini.

Exercice 6. Soit (X,d) un espace métrique compact, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Exercice 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E. On note $A + B = \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}$.

1. Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.
2. Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.
3. Donner un exemple de parties toutes deux fermées d'un espace normé dont la somme n'est pas un fermé.

Exercice 8. Dans un espace métrique soit U et V deux ouverts disjoints et K un compact inclus dans la réunion $U \cup V$. Montrer que $U \cap K$ et $V \cap K$ sont compacts.

Exercice 9. Soit (X, d) un espace métrique, et soit (K_n) une suite de compacts dans X qui sont emboîtés, c'est-à-dire tels que pour tout $n \geqslant 0$, $K_{n+1} \subset K_n$. On note K l'intersection des K_n.

1. Montrer que K est fermé dans K_0, puis que K est compact.
2. Dans cette question, on suppose K vide. Montrer que $(K_0 \backslash K_n)_{n \geqslant 1}$ est un recouvrement ouvert de K_0, et en déduire que l'un au moins des K_n est vide.
3. Soit U un ouvert de X contenant K. Montrer qu'il existe un n tel que $K_n \subset U$.

Exercice 10. Soit $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ et soit f une application continue de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}^m$.
Montrer que $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ si et seulement si pour tout K compact inclus dans $\mathbf{R}^m$, l'ensemble $f^{-1}(K)$ est également compact.

Exercice 11. Soit $n \geqslant 1$ et soit g une application continue de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$. On suppose que $g(x) \to 0$ quand $\|x\| \to +\infty$.
Montrer que g est bornée, que g est uniformément continue, que g atteint au moins une de ses bornes (et donner un exemple où l'une des deux n'est pas atteinte).

Exercice 12. Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle que pour $A \subset X$ (non vide) et $x \in X$, on note $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ et qu'on a montré en TD (fiche 2, exercice 11) que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue.
Pour $A \subset X$, $B \subset X$ (non vides), on note $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$.

1. Soit K et F deux parties disjointes non vides de X, avec K compact et F fermé dans X. Montrer que $d(K, F) > 0$.
2. Donner un exemple d'espace métrique (X, d) et de fermés disjoints non vides E et F dans X avec $d(E, F) = 0$.
3. Soit K et L deux compacts non vides de X. Montrer qu'il existe un $x \in K$ et un $y \in L$ tels que $d(K, L) = d(x, y)$.
4. Dans cette question $X = \mathbf{R}^n$ pour un $n \geqslant 1$, muni de la distance euclidienne. Soit K et F disjoints non vides dans $\mathbf{R}^n$ avec K compact et F fermé. Pour $R > 0$ on note $F_R = \{y \in F \mid \|y\| \leqslant R\}$. Construire un R tel que $d(K, F) = d(K, F_R)$ et en déduire qu'il existe un $x \in K$ et un $y \in F$ tels que $d(K, F) = d(x, y)$.

Exercice 13.

1. Soit (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X. On suppose que (x_n) converge vers x dans (X, d) et on pose
$$A = \{x_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}$$
Montrer que A est un sous-ensemble compact de (X, d).
2. Soit (Y, d_Y) et (Z, d_Z) deux espaces métriques, et soit f une application de Y vers Z. On suppose d'une part que f est continue, et d'autre part que pour tout compact $K \subset Z$, $f^{-1}(K)$ est également compact. Montrer que pour tout fermé $F \subset Y$, $f(F)$ est également fermé.

Exercice 14. Soit (K, d) un espace métrique compact et $f : K \to K$ une fonction telle que :

$$\text{pour tout } x \in K, \text{ tout } y \in K \text{ tels que } x \neq y, \ d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

1. Montrer que f a au plus un point fixe.
2. Montrer qu'il existe un élément $a \in K$ tel que $d(a, f(a)) \leqslant d(x, f(x))$ pour tout $x \in K$.
3. Montrer que $f(a) = a$.
4. Soit $x_0 \in K$, on définit la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $(d(x_n, a))_{n \geqslant 0}$ converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.
5. Montrer que $\ell = 0$.
6. Énoncer le résultat démontré dans cet exercice.

Exercice 15. Soit (K, d) un espace métrique compact. On considère une isométrie $f : K \to K$, c.à.d. telle que pour tout $x, y \in K$, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.
Le but de l'exercice est de montrer que f est bijective.

1. Vérifier que f est injective.
2. Supposons que f n'est pas bijective. Montrer qu'il existe alors $b \in K$ tel que $d(b, f(K)) = r > 0$.
3. Soit $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_{n+1} = f(b_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n > 0$, $d(b, b_n) \geqslant r$.
   (b) En déduire que pour tout $m > n \geqslant 0$, $d(b_n, b_m) \geqslant r$.
   (c) Montrer qu'aucune suite extraite de $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne peut converger et conclure.

Exercice 16. Soit (K, d) un espace métrique compact, soit $f : K \to K$ telle que :

$$\text{pour tout } x, y \in K, \ d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y).$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est une isométrie bijective.
On considère x et y deux éléments de K et on définit deux suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par $x_0 = x$, $y_0 = y$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ et $y_{n+1} = f(y_n)$.

1. Justifier qu'il existe une fonction $\theta : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que les suites $(x_{\theta(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(y_{\theta(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ sont convergentes.
2. On définit par récurrence une fonction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ en posant $\varphi(0) = \theta(0)$, $\varphi(1) = \theta(1)$ et pour tout $n \geqslant 0$, $\varphi(n+2) = \theta(2\varphi(n+1) - \varphi(n) + 1)$.
   Montrer que φ est bien définie en vérifiant par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $\varphi(n+1) - \varphi(n) > 0$.
3. En déduire que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ sont convergentes.
4. Montrer que $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $n \mapsto \varphi(n+1) - \varphi(n)$ est strictement croissante.
5. Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $d(x, x_{\psi(n)}) \leqslant d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)})$ et $d(y, y_{\psi(n)}) \leqslant d(y_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n+1)})$.
6. En déduire que $\lim_{n \to \infty} x_{\psi(n)} = x$ et $\lim_{n \to \infty} y_{\psi(n)} = y$.
7. Montrer enfin que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.
8. Conclure en utilisant l'exercice précédent (ou en montrant que $f(K)$ est dense dans K).

Exercice 17. Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé. Soit K une partie de E compacte, convexe et non vide, et soit a un élément de K. Soit f une application 1-lipschitzienne de K dans K.

1. Pour chaque $n \geqslant 2$ et tout x de K, on pose :
   $$f_n(x) = \frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}f(x).$$
   Montrer que f_n envoie K dans K, puis que f_n admet un unique point fixe dans K.
2. En déduire que f admet au moins un point fixe dans K.

Exercice 18. *Premier théorème de Dini*
Soit (K, d) un espace métrique compact et soit (f_n) une suite de fonctions continues à valeurs réelles définies sur K. On suppose d'une part que pour tout x fixé de K la suite de réels $(f_n(x))$ est décroissante, et d'autre part que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0.

1. Justifier que pour tout $x \in K$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a $f_n(x) \geqslant 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut choisir un $x_n \in K$ pour lequel $\sup\limits_{x\in K} f_n(x) = f_n(x_n)$.
3. Montrer que la suite $(f_n(x_n))$ est décroissante et minorée, et conclure qu'elle converge vers un réel qu'on notera l.
4. Justifier l'existence d'une application φ de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{N}$ strictement croissante telle que la suite $(x_{\varphi(n)})$ soit convergente vers un élément de K qu'on notera x.
5. Soit N et n deux entiers naturels avec $N \leqslant n$. Justifier l'inégalité

$$(*_{N,n}) \qquad f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \leqslant f_{\varphi(N)}(x_{\varphi(n)})$$

   puis écrire l'inégalité $(*_N)$ qu'on parvient à montrer en faisant tendre n vers l'infini dans $(*_{N,n})$, à N fixé.
6. Déduire de la question précédente que $l = 0$, puis que la convergence de (f_n) vers la fonction nulle est uniforme.

Exercice 19. Le but de cet exercice est de montrer le théorème de d'Alembert–Gauss : tout polynôme non-constant à coefficients complexes admet une racine complexe.
Soit P un polynôme non-constant à coefficients complexes.

1. Montrer que la fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R},\ z \mapsto |P(z)|$ admet un minimum global. On note $z_0 \in \mathbf{C}$ un point tel que $|P(z_0)| = \min_{z\in\mathbf{C}} |P(z)|$.
2. Supposons que $P(z_0) \neq 0$. On définit $Q : \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ z \mapsto \frac{P(z_0+z)}{P(z_0)}$.
   (a) Montrer qu'il existe $p, n \in \mathbf{N}^*$ deux entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, et $b_p, \ldots, b_n \in \mathbf{C}$ tels que $Q(z) = 1 + \sum\limits_{k=p}^{n} b_k z^k$ et $b_p \neq 0$.
   (b) Soit $r > 0$ et $\varphi \in \mathbf{R}$ tels que $b_p = re^{i\varphi}$. Pour tout $\rho > 0$, on note $z_\rho = \rho e^{i(\pi-\varphi)/p}$. Vérifier que si ρ est suffisamment petit, alors $|Q(z_\rho)| < 1$.
3. Conclure.