Fiche de synthèse [1]

Toutes les définitions, tous les énoncés du cours sont à connaître.

Démonstrations à connaître pour l'examen

Chapitre 1

1. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer les deux propriétés suivantes :
   — Une réunion quelconque d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).
   — Une intersection finie d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).
2. Soit (X, d) un espace métrique, $x \in X$, $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de (X, d) et que la boule fermée $B_f(x, r)$ est un fermé de (X, d).
3. Soit X un ensemble, d_1 et d_2 deux distances sur X. Montrer que si d_1 et d_2 sont Lipschitz-équivalentes alors elles définissent la même topologie sur X.
4. Soit X un ensemble, d_1 et d_2 deux distances sur X. Montrer que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si et seulement si :
$$\forall (x_n) \subset X \text{ et } x \in X, \text{ on a } x_n \to x \text{ dans } (X, d_1) \text{ ssi } x_n \to x \text{ dans } (X, d_2)$$
5. Montrer qu'une suite d'éléments d'un espace métrique a au plus une limite.
6. Soit (X, d) un espace métrique, A une partie de X, $x \in X$. Montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement s'l existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de A qui converge vers x.
7. L'adhérence de $A \cup B$ est $\overline{A} \cup \overline{B}$. L'intérieur de $A \cap B$ est $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.
8. Si (X, d) est un espace métrique et $A \subset X$, alors $U \subset A$ est ouvert dans A, avec la distance induite, si et seulement s'il existe un ouvert V de X tel que $U = V \cap A$.

Chapitre 2

9. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue en un point $a \in X$ si et seulement si :
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que, si $x \in X$ vérifie $d_X(x, a) < \delta$, alors $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.
10. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue en un point $a \in X$ si et seulement si :
pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset X$ telle que $x_n \to a$, on a $f(x_n) \to f(a)$.
11. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue en X si et seulement si :
pour tout ouvert V de Y l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X.
12. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer la propriété de continuité de la distance : si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites de X et $x_n \to x$ et $y_n \to y$ alors $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.
13. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes :
    (i) f est continue sur E ;
    (ii) f est continue en 0_E ;
    (iii) il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$.
    (iv) f est lipschitzienne.
14. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F admet une structure d'espace vectoriel normé si on le munit de la norme subordonnée $\|\!|\cdot|\!\|$.

Chapitre 3

15. Soit (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de X. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente alors elle est de Cauchy, et que si elle est de Cauchy elle est bornée.
16. Soit (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de X. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence alors $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers cette valeur.
17. Soit (X, d) un espace métrique complet, $A \subset X$. Montrer que A est complet (pour la métrique induite) si et seulement si A est fermé.
18. Soit (X, d_X) un espace métrique compact, et (Y, d_Y) un espace métrique complet. Montrer que les espaces $B(X, Y)$ (l'espace des fonctions bornées) et $C_b(X, Y)$ (l'espace des fonctions continues et bornées), muni de la distance du sup, $d_\infty(f, g) := \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$, sont complets.
19. Montrer que ℓ^∞, muni de la norme du sup, est un espace de Banach.
20. Toute fonction lipschitzienne entre deux espaces métriques est uniformément continue.
21. Théorème de Picard (ou des contractions). Soit (X, d) un espace métrique complet, $f : X \to X$ contractante (c'est-à-dire que f est k-lipschitzienne avec $k < 1$). Alors f admet un unique point fixe.

[1] Ce document est la mise à jour de la fiche de synthèse 2022-23 de Julien Melleray

Chapitre 4

1. Soit (X,d) un espace métrique, A une partie compacte de X. Montrer que A est fermée.
2. Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. On munit le produit $X\times Y$ de la distance produit d_∞ définie par $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(d_X(x_1,x_1), d_Y(y_1,y_2))$. Montrer que si (X,d_X) et (Y,d_Y) sont compacts alors $(X\times Y, d_\infty)$ est compact.
3. Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$. Montrer que si X est compact et f continue alors $f(X)$ est un compact de Y.
4. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé. Montrer que toute application linéaire $u : E \to F$ est continue (on pourra utiliser sans démonstration le fait que, sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes).

Chapitre 5

5. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que X est connexe si et seulement si le seules applications continues de X dans $\{0,1\}$ sont les applications constantes.
6. Soit (X,d) un espace métrique et A une partie connexe de X. Montrer que $\overline{A}$ est connexe.
7. Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$. Montrer que si (X,d_X) est connexe et f continue alors $f(X)$ est un connexe de (Y,d_Y).
8. Montrer qu'une réunion de connexes d'intersection non vide est connexe.
9. Montrer que si (X,d) est connexe par arcs alors (X,d) est connexe.
10. Montrer que, dans un espace vectoriel normé, tout ouvert connexe est connexe par arcs.

1 Liste non exhaustive de compétences attendues

Il faut faire attention à la qualité et la précision de la rédaction (bonne utilisation des quantificateurs en particulier).

1. Savoir justifier qu'un ensemble admet une borne supérieure et en connaître les différentes caractérisations.
2. Savoir reconnaître, et vérifier, qu'une application est une distance (ou une norme), et en utiliser les propriétés.
3. Savoir étudier si deux normes sont équivalentes (en particulier, savoir montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalente). Connaître au moins un exemple de normes non équivalentes.
4. Connaître diverses caractérisations des parties ouvertes et fermées, savoir mettre en œuvre ces caractérisations sur des exemples (et choisir la caractérisation adaptée à l'exemple étudié).
5. Connaître la définition de l'image réciproque d'un ensemble par une fonction, savoir l'utiliser pour montrer qu'une partie est ouverte ou fermée.
6. Savoir déterminer si un point appartient à l'intérieur ou à l'adhérence d'une partie donnée.
7. Comprendre la différence entre convergence simple et convergence uniforme, savoir donner des exemples illustrant cette différence.
8. Savoir reconnaître une application linéaire et étudier sa continuité ; le cas échéant, savoir déterminer sa norme subordonnée.
9. Savoir utiliser la caractérisation séquentielle de la compacité.
10. Savoir écrire des extractions successives d'une même suite.
11. Savoir utiliser la compacité pour prouver l'existence (et étudier...) la borne inférieure et la borne supérieure d'une fonction continue.
12. Connaître et savoir utiliser le résultat suivant : si (X, d) est un espace métrique compact, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de X ayant une unique valeur d'adhérence $x \in X$, alors $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers x.
13. Savoir étudier la compacité d'une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie.
14. En dimension finie, savoir combiner compacité des parties fermés bornées avec une hypothèse sur le comportement à l'infini d'une fonction continue.
15. Dans des situations concrètes, savoir construire un chemin entre deux points (quand il en existe un).
16. Savoir étudier la convexité d'une partie d'un espace vectoriel normé.
17. Savoir étudier la connexité par arcs d'un espace métrique.
18. Connaître les implications entre convexité, connexité par arcs et connexité et savoir les appliquer dans des cas concrets.
19. Connaître la caractérisation des parties connexes de $\mathbf{R}$.
20. Savoir utiliser la définition de la connexité et la stabilité de la connexité par image continue.
21. Connaître et savoir utiliser le lien entre suite convergente et suite de Cauchy ; connaître des exemples de suites de Cauchy non convergentes.
22. Savoir démontrer qu'une suite est de Cauchy.
23. Connaître divers exemples d'espaces vectoriels normés complets.
24. Savoir utiliser la convergence des séries absolument convergentes dans les espaces de Banach.
25. Savoir appliquer le théorème du point fixe de Picard ; en particulier, savoir montrer qu'une application est contractante.
26. Savoir appliquer le théorème de prolongement des applications uniformément continues.