Fiche de synthèse [1]

Toutes les définitions, tous les énoncés du cours sont à connaître.

Démonstrations à connaître pour l'examen

Chapitre 1

1. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer les deux propriétés suivantes :
   — Une réunion quelconque d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).
   — Une intersection finie d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).
2. Soit (X, d) un espace métrique, $x \in X$, $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de (X, d) et que la boule fermée $B_f(x, r)$ est un fermé de (X, d).
3. Soit X un ensemble, d_1 et d_2 deux distances sur X. Montrer que si d_1 et d_2 sont Lipschitz-équivalentes alors elles définissent la même topologie sur X.
4. Soit X un ensemble, d_1 et d_2 deux distances sur X. Montrer que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si et seulement si :
$$\forall (x_n) \subset X \text{ et } x \in X, \text{ on a } x_n \to x \text{ dans } (X, d_1) \text{ ssi } x_n \to x \text{ dans } (X, d_2)$$
5. Montrer qu'une suite d'éléments d'un espace métrique a au plus une limite.
6. Soit (X, d) un espace métrique, A une partie de X, $x \in X$. Montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement s'l existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de A qui converge vers x.
7. L'adhérence de $A \cup B$ est $\overline{A} \cup \overline{B}$. L'intérieur de $A \cap B$ est $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.
8. Si (X, d) est un espace métrique et $A \subset X$, alors $U \subset A$ est ouvert dans A, avec la distance induite, si et seulement s'il existe un ouvert V de X tel que $U = V \cap A$.

Chapitre 2

9. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue en un point $a \in X$ si et seulement si :
   $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que, si $x \in X$ vérifie $d_X(x, a) < \delta$, alors $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.
10. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue en un point $a \in X$ si et seulement si :
    pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset X$ telle que $x_n \to a$, on a $f(x_n) \to f(a)$.
11. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue en X si et seulement si :
    pour tout ouvert V de Y l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X.
12. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer la propriété de continuité de la distance : si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites de X et $x_n \to x$ et $y_n \to y$ alors $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.
13. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes :
    (i) f est continue sur E ;
    (ii) f est continue en 0_E ;
    (iii) il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$.
    (iv) f est lipschitzienne.
14. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F admet une structure d'espace vectoriel normé si on le munit de la norme subordonnée $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$.

Chapitre 3

15. Soit (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de X. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente alors elle est de Cauchy, et que si elle est de Cauchy elle est bornée.
16. Soit (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de X. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence alors $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers cette valeur.
17. Soit (X, d) un espace métrique complet, $A \subset X$. Montrer que A est complet (pour la métrique induite) si et seulement si A est fermé.
18. Soit (X, d_X) un espace métrique compact, et (Y, d_Y) un espace métrique complet. Montrer que les espaces $B(X, Y)$ (l'espace des fonctions bornées) et $C_b(X, Y)$ (l'espace des fonctions continues et bornées), muni de la distance du sup, $d_\infty(f, g) := \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$, sont complets.
19. Montrer que ℓ^∞, muni de la norme du sup, est un espace de Banach.
20. Toute fonction lipschitzienne entre deux espaces métriques est uniformément continue.
21. Théorème de Picard (ou des contractions). Soit (X, d) un espace métrique complet, $f : X \to X$ contractante (c'est-à-dire que f est k-lipschitzienne avec $k < 1$). Alors f admet un unique point fixe.

1. Ce document est la mise à jour de la fiche de synthèse 2022-23 de Julien Melleray

Chapitre 4

1. Soit (X,d) un espace métrique, A une partie compacte de X. Montrer que A est fermée.
2. Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. On munit le produit $X \times Y$ de la distance produit d_∞ définie par $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(d_X(x_1,x_1), d_Y(y_1,y_2))$. Montrer que si (X,d_X) et (Y,d_Y) sont compacts alors $(X \times Y, d_\infty)$ est compact.
3. Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$. Montrer que si X est compact et f continue alors $f(X)$ est un compact de Y.
4. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé. Montrer que toute application linéaire $u : E \to F$ est continue (on pourra utiliser sans démonstration le fait que, sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes).

Chapitre 5

5. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que X est connexe si et seulement si le seules applications continues de X dans $\{0,1\}$ sont les applications constantes.
6. Soit (X,d) un espace métrique et A une partie connexe de X. Montrer que $\overline{A}$ est connexe.
7. Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$. Montrer que si (X,d_X) est connexe et f continue alors $f(X)$ est un connexe de (Y,d_Y).
8. Montrer qu'une réunion de connexes d'intersection non vide est connexe.
9. Montrer que si (X,d) est connexe par arcs alors (X,d) est connexe.
10. Montrer que, dans un espace vectoriel normé, tout ouvert connexe est connexe par arcs.