Université Claude Bernard Lyon 1
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie affine et euclidienne
Année 2024

Fiche 1

On se place dans un espace affine, souvent de dimension 2 ou 3 (euclidien lorsqu'il le faut), muni d'un repère (orthonormé lorsqu'il le faut) ou, ce qui revient presque au même, dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1. [Droite affine] On se place sur une droite affine $\mathscr{E}$ (espace affine de dimension 1) et soit $u \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$. Pour tout couple de points, (A, B). On définit $\overline{AB} \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}u$. Montrer que pour tout quadruplet de points A, B, C, D le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ ne dépend pas, lui, de u.

Exercice 2. [Thalès]

a) On se place dans un plan affine. Soit trois droites d, d' et d'' parallèles distinctes. Soient D_1 et D_2 deux droites dont aucunes n'est parallèles . Soient $A_i = D_i \cap d$, $A'_i = D_i \cap d'$ et $A''_i = D_i \cap d''$. Montrer que :

$$\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}$$

et que réciproquement si $B \in D_1$ et

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}$$

alors il est sur d''.

b) Que peut on dire de plus si $A_1 = A_2$

c) Quel généralisation en dimension supérieure ?

Exercice 3. [Pappus–version 0] On se place dans un plan affine. Soit A, B, C trois points d'une droite D et A', B', C' trois points d'une droite D' distincte de D. Montrer que si AB' est parallèle à BA' et BC' parallèle CB', alors AC' est parallèle à CA'.

Exercice 4. [Ceva] On considère un triangle ABC et $A' \in BC$, $C' \in AB$ et $B' \in AC$. Montrer que AA', BB' et CC' sont parallèles ou concourantes si et seulement si ils vérifient l'égalité :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \ .$$

Exercice 5. On considère deux poteaux de hauteur h_1 et h_2. On tend un fil de leur sommet à la base de l'autre. A quelle hauteur se croisent les fils ?

Exercice 6. [Attention à la caractéristique 2] Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 2. (2=0) Montrer que dans tout espace affine les diagonales d'un parallèlogrammes sont parallèles.

Exercice 7. Montrer que les applications affines conservent l'alignement et les rapports de mesures algébriques.

Exercice 8. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.

a) Déterminer une application affine qui envoie le parallélogramme P de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ sur le parallélogramme P' délimité par les droites d'équations $2x-y+1=0$, $2x-y-1=0$, $x+y=2$, $x+y=5$.

b) Existe-t-il une application affine qui envoie P sur le quadrilatère Q dont les sommets sont $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2,0)$, $(-1,0)$?

c) Combien existe-t-il d'applications affines qui envoient P sur P' ?

Exercice 9. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Déterminer une application affine qui envoie le parallélépipède de sommets $\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ et celui que délimitent les plans d'équations $x+y+z=-1$, $x+y+z=2$, $-x+z=1$, $-x+z=3$, $2x+y-z=-2$, $2x+y-z=3$.

Exercice 10. [Principe de conjugaison (premier avatar)]

a) Étant donnés un point O dans un espace affine et un scalaire l, on note $h_{O,l}$ l'homothétie de centre O et de rapport l. Pour φ affine, décrire $\varphi h_{O,l} \varphi^{-1}$.

b) Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ deux sous-espaces affines dont les directions sont supplémentaires. On peut donc parler de la projection $p_{\mathscr{F},\mathscr{F}'}$ sur $\mathscr{F}$ parallèlement à $\mathscr{F}'$. Pour φ affine, décrire $\varphi p_{\mathscr{F},\mathscr{F}'} \varphi^{-1}$.

Exercice 11. Centre du groupe affine Quelles sont les applications affines φ telles que pour toute application affine ψ, on ait : $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?

Exercice 12. [Homothéties-translations]
Montrer que l'ensemble des transformations affines d'un espace affine qui sont soit une homothétie, soit une translation, est stable par composition et passage à l'inverse. Les translations seules forment elles un sous groupes ? Les homotéties seules ?