Fiche de TD 6

Exercice 0 (*Un classique de Noel*)

Soit n un entier naturel non nul et t un réel. Dans $\mathbf{R}[X]$, quel est le reste de la division euclidienne de $(cost + sint\, X)^n$ par X^2+1?

Exercice 1 Trouver pgcd (A,B) ainsi que $U,V \in \mathbf{Q}[X]$ tels que $UA+VB=$ pgcd(A,B) pour les polynômes $A,B \in \mathbf{Q}[X]$ suivants:

i) $A = X^5+1$ et $B = X^3+X+1$.

ii) $A = X^3+X^2+X+1$ et $B = X^3+1$.

Exercice 2 Soient deux entiers naturels $m > n \geq 1$ et $\delta =$pgcd (m,n). Pour $l \in \mathbf{N}^\star$, on désigne par U_l l'ensemble des racines $l-$ièmes de l'unité de $\mathbf{C}$.

1. Factoriser X^n-1 en irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$.

2.

i) Montrer que $U_m \cap U_n = U_\delta$.

ii) En déduire, en se servant de la factorisation du 1, que $X^\delta-1$ est un diviseur commun de X^m-1 et X^n-1 dans $\mathbf{C}[X]$.

iii) Montrer que $X^\delta - 1 =$ pgcd (X^m-1, X^n-1).

3. (facultatif) Retrouver pgcd (X^m-1, X^n-1) en se servant de l'algorithme d'Euclide.

Exercice 3 Factoriser les polynômes $P = X^6+X^3+1$, $Q = X^4+X^3+X^2+X+1$ et $R = X^4+1$ sur $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}$.

[*Pour rappel:* $(X-1)(1+X+\cdots+X^n) = X^{n+1}-1$.]

Exercice 4 (Polynômes de Tchebychev)

Soit (T_n) la suite de $\mathbf{Z}[X]$ définie comme suit:

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1},\, n \in \mathbf{N}^\star.$$

1. Calculer les premiers termes T_2, T_3, T_4.

2. i) Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout réel t,

$$T_n(cos\, t) = cos\, nt.$$

[*Procéder par récurrence*]

ii) En déduire les racines de T_n.

iii) En déduire que $T_n(T_m) = T_{mn} = T_m(T_n)$.

iv) Trouver une formule explicite de T_n.