Fiche de TD 5

Exercice 1 Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe d'ordre n. On suppose que H est l'unique sous-groupe d'ordre n de G. Montrer que H est distingué dans G.
[*Pour $a \in G$, que peut-on dire de aHa^{-1}?*]

Exercice 2
Soit G un groupe fini d'ordre pair. Montrer que tout sous-groupe $H \leq G$ d'indice 2 est distingué.

Exercice 3 Soit $G = \langle a \rangle$ un (le) groupe cyclique d'ordre 12 et soit $H_1 = \langle a^3 \rangle$ et $H_2 = \langle a^4 \rangle$. Faire la liste des classes à gauche modulo H_1 et modulo H_2 de G.

Exercice 4
i) Faire la liste des sous-groupes du groupe S_3. Parmi ceux-ci, quels sont ceux qui sont distingués?
ii) Répondre par *vrai* ou *faux* aux assertions suivantes:
A1. Pour tout $n \geq 2$, S_n a au moins $\binom{n}{2}$ sous-groupes d'ordre 2.
A2. Pour tout $n \geq 2$, S_n a au moins un sous-groupe isomorphe au groupe U_n des racines $n-$ièmes de l'unité.
A3. Pour tout $n \geq 3$, S_n a un sous-groupe d'indice 2.

Exercice 5
1. On considère le $6-$ cycle $c = (123456) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ du groupe de permutations S_6.

i) Calculer $c^l, l \in \mathbf{N}$.
[*Il est instructif de visualiser c^l sur une figure de l'hexagone.*]
ii) Donner la décomposition canonique en cycles et l'ordre de c^l pour tout $l \in [6]$.

2. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Donner la décomposition canonique en cycles, l'ordre et la signature de σ, τ et $\tau \circ \sigma$. Calculer σ^{333}.

Exercice 6 Soit S_n, le groupe de permutations.
1. Montrer par une récurrence sur $n \geq 2$ que toute permutation $\sigma \in S_n$ est la composée de transpositions (ij) avec $i, j \in [n], i < j$.
[*Pour l'hérédité, distinguer les cas $\sigma(n+1) = n+1$ et $\sigma(n+1) \neq n+1$.*]
2. Soit l un entier avec $2 \leq l \leq n$ et $c = (i_1 i_2 \cdots i_l)$ un cycle de longueur l de S_n. Confirmer que

$$c = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{l-1} i_l).$$

En déduire une deuxième preuve du 1. [*Se servir de la décomposition canonique en cycles.*]

3. Montrer que pour tout $i, j \in [n]$ avec $i < j-1$ on a

$$(ij) = (j-1\,j)(i\,j-1)(j-1\,j).$$

En déduire que S_n est engendré par les transpositions $(i\,i+1)$ avec $i \in [n-1]$.

4. Expliciter une partie génératrice minimale de S_3.
[*minimale= de plus petit cardinal*]

Exercice 7 (Centre et classes de conjugaison de S_n)
1. Montrer que pour toute permutation $\sigma \in S_n$ et tout $l-$ cycle $c = (i_1 i_2 \cdots i_l) \in S_n$, on a

$$\sigma(i_1 i_2 \cdots i_l)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_l)).$$

2. Déterminer le centre de S_n [*Pour* $n \geq 3$, *choisir une partie* $\{i,j,k\} \subset [n]$ *de cardinal 3 et faire commuter* $\sigma \in Z_{S_n}$ *avec* (ij) *et* (jk).]

3. Fixons s cycles $c_1, c_2, \ldots, c_s$ de supports deux à deux disjoints de S_n et soit $\sigma \in S_n$. Ecrire la décomposition canonique de la permutation $\sigma\, c_1 c_2 \cdots c_s\, \sigma^{-1}$.

4. Notons $n_j(\pi)$ le nombre de cycles de longueur $j \geq 1$ qui figurent dans la décomposition canonique de la permutation $\pi \in S_n$.
Soient π_1 et $\pi_2 \in S_n$. Montrer qu'il existe $\sigma \in S_n$ telle que $\pi_2 = \sigma\pi_1\sigma^{-1}$ ssi $n_j(\pi_1) = n_j(\pi_2)$ pour tout $j \geq 1$.
[σ *transforme les supports des cycles de longueur* j *de* π_1 *en les supports des cycles de longueur* j *de* π_2.]

5. On appelle *partition* de l'entier $n \geq 1$, toute écriture $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ avec $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r > 0$ et $r \geq 1$.

i) Faire la liste des partitions de 4 et de 5.

ii) Faire la liste des classes de conjugaison de S_4 et de S_5.
[*Donner un représentant par classe.*]

iii) Notons $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier $n \geq 1$. Expliquer pourquoi il y a exactement $p(n)$ classes de conjugaison dans S_n.

Exercice 8

i) En se servant de l'exercice 7, faire la liste des ordres des permutations de S_4, S_5 et S_6.

ii) Combien y-a-t-il de permutations d'ordre n dans S_n?

Exercice 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Gl_4(\mathbf{C})$.

i) Expliciter le sous-groupe $\langle A \rangle \leq Gl_4(\mathbf{C})$.

ii) Caractériser les matrices $M \in Gl_4(\mathbf{C})$ qui sont conjuguées à A.

Exercice 10 Soit p un nombre premier. On note $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ le corps à p éléments et $Gl_n(\mathbf{F}_p)$ le groupe des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbf{F}_p$.

1. On suppose $n = 2 = p$.
i) Faire la liste des éléments de $Gl_2(\mathbf{F}_2)$ et déterminer leur ordre.

ii) Déterminer les classes de conjugaison de $Gl_2(\mathbf{F}_2)$.
[*La conjugaison conserve l'ordre des éléments.*]

2. On suppose $n = 3$ et $p = 2$ et on pose

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \overline{a} & \overline{b} \\ 0 & 1 & \overline{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbf{F}_2 \right\}.$$

i) Confirmer que U est un sous-groupe de $Gl_3(\mathbf{F}_2)$. Faire la liste de ses éléments.

ii) Déterminer le centre Z_U et les classes de conjugaison de U.

Exercice 11 (Automorphismes)
Soit G un groupe. On note $Aut(G)$ l'ensemble des morphismes bijectifs $\varphi : G \to G$.
1. Montrer que $Aut(G)$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

Pour la suite, G est le groupe additif $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
Pour un automorphisme $\varphi : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (i.e. une bijection telle que $\varphi(\overline{a} + \overline{b}) = \varphi(\overline{a}) + \varphi(\overline{b})$ pour tout $\overline{a}$ et $\overline{b}$), on pose $\hat{\varphi} = \varphi(\overline{1})$.

2. Soit φ et ψ deux automorphismes. Montrer que
i) $\varphi(\overline{a}) = \overline{a}\hat{\varphi}$ pour tout $\overline{a} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
[*Récurrence sur* $a \geq 1$]

ii) $\widehat{\psi \circ \varphi} = \hat{\psi}\hat{\varphi}$.

iii) $\hat{\varphi}$ est un inversible multiplicatif.

3. Montrer que l'application $Aut(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\star : \varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est un isomorphisme de groupes.

4. A tire d'exemple, expliciter les automorphismes de $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.