

fiche TD1 - corrigés**Exercice 2**

ii) $g : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} : (x, y) \mapsto \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$ est une bijection.

On observe les diagonales: soit $d \in \mathbf{N}$. Pour $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ sur la droite d'équation $x + y = d$,

$$g(x, y) = \frac{d(d+1)}{2} + x$$

parcourt les $d+1$ entiers $\frac{d(d+1)}{2}, \frac{d(d+1)}{2} + 1, \dots, \frac{d(d+1)}{2} + d = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1$.

Surjectivité de g : pour $N \in \mathbf{N}$, il s'agit de trouver $d \in \mathbf{N}$ tel que

$$\frac{d(d+1)}{2} \leq N \leq \frac{d(d+1)}{2} + d.$$

On l'obtient comme ceci: la partie $P = \{l \in \mathbf{N}, \frac{l(l+1)}{2} \leq N\}$ est non vide ($0 \in P$) et majorée (pour $x \geq 0$, $x \mapsto \frac{x(x+1)}{2}$ est strictement croissante). P admet un plus grand élément $d = \max(P)$ pour lequel

$$\frac{d(d+1)}{2} \leq N < \frac{(d+1)(d+2)}{2} = \frac{(d+1)d}{2} + d + 1.$$

N s'écrit alors

$$N = \frac{d(d+1)}{2} + x$$

pour un certain entier $x \in [0, d]$. En prenant $y = d - x \in \mathbf{N}$, on a

$$g(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x = \frac{d(d+1)}{2} + N - \frac{d(d+1)}{2} = N,$$

i.e. (x, y) est un antécédent de N par g .

Injectivité de g : soit $N \in \mathbf{N}$. Si (x, y) est tel que $N = g(x, y)$, alors en notant $\delta = x + y$,

$$N = \frac{\delta(\delta+1)}{2} + x, \quad x \in [0, \delta].$$

Ce δ est donc $\max(P)$, i.e. $\delta = d$ qui, lui, est déterminé par N ; ensuite $x = N - \frac{d(d+1)}{2}$ et $y = d - x$. L'antécédent (x, y) est donc unique.

iii) C'est une récurrence: pour $r = 1$, prendre $f_1 = id_{\mathbf{N}}$ et pour $r = 2$, $f_2 = g$.

$r \Rightarrow r + 1$: supposons qu'il existe une bijection $f_r : \mathbf{N}^r \rightarrow \mathbf{N}$.

L'application

$$F_{r+1} : \mathbf{N}^{r+1} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N} : (n_1, \dots, n_r, n_{r+1}) \mapsto (f_r(n_1, \dots, n_r), n_{r+1})$$

est bijective et la composée $f_{r+1} = f_2 \circ F_{r+1}$ est une bijection de $\mathbf{N}^{r+1}$ sur $\mathbf{N}$.

Exercice 3

ii) $\psi : P(E) \rightarrow \{0, 1\}^E : A \mapsto \psi(A) = \mathbf{1}_A$ est une bijection.

Il s'agit de mq toute application $\varphi : E \rightarrow \{0, 1\}$ admet un unique antécédent $A \in P(E)$ par ψ :

pour $A \in P(E)$, $\psi(A) = \varphi$ signifie $\mathbf{1}_A(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in E$, i.e. $\varphi(x) = 1$ si $x \in A$ et $\varphi(x) = 0$ si $x \notin A$. Ceci fixe la partie: $A = \{x \in E, \varphi(x) = 1\}$.

iii) Calcul de $|P([n])|$ par récurrence sur $n \geq 1$.

Initialisation: pour $n = 1$, $[1] = \{1\}$, $P([1]) = \{\emptyset, \{1\}\}$ et $|P([1])| = 2$.

Hérédité: on suppose $|P([n])| = 2^n$.

Pour compter les parties de $[n+1]$, on sépare celles qui ne contiennent pas $n+1$ de celles qui le contiennent:

si $n+1 \notin A$, alors $A \subset [n]$ et, par hypothèse de récurrence, il y a 2^n choix pour A ;

si $n+1 \in A$ alors $A = \{n+1\} \cup B$ où $B \subset [n]$ et il y a 2^n choix pour B .

Au total $|P([n+1])| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Exercice 6

i) Sur $\mathbf{R}$, soit la relation $x \sim y$ si $y - x \in \mathbf{Z}$.

$\sim$ est réflexive: $x - x = 0 \in \mathbf{Z}$, symétrique: si $y - x \in \mathbf{Z}$ alors $x - y = -(y - x) \in \mathbf{Z}$; transitive: si $y - x \in \mathbf{Z}$ et $z - y \in \mathbf{Z}$, alors $z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbf{Z}$.

Soit $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$.

On observe ceci: si $x \sim y$, i.e. si $y - x \in \mathbf{Z}$, alors

$$\varphi(y) = \varphi(x + (y - x)) = e^{2\pi i(x + (y - x))} = e^{2\pi i x} e^{2\pi i(y - x)} = \varphi(x).$$

L'application φ est donc constante sur les classes d'équivalence

$$\bar{x} = \{y \in \mathbf{R}, y \sim x\}.$$

On peut alors définir une nouvelle application (c'est le passage au quotient)

$$\bar{\varphi} : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow S^1 : \bar{x} \mapsto \bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x)$$

(la valeur de $\bar{\varphi}$ sur la classe $\bar{x}$ est la valeur constante de φ sur cette classe).

$\bar{\varphi}$ est surjective car tout nombre complexe z de module 1 s'écrit $z = e^{2\pi i x}$ pour un certain réel x .

$\bar{\varphi}$ est injective pour la raison suivante: $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{\varphi}(\bar{y})$ signifie $\varphi(x) = \varphi(y)$, i.e. $e^{2\pi i x} = e^{2\pi i y}$, i.e. $e^{2\pi i(y-x)} = 1$, i.e.

$$\cos(2\pi(y-x)) + i \sin(2\pi(y-x)) = 1,$$

i.e. $y - x \in \mathbf{Z}$, i.e. $x \sim y$, et on sait que ceci équivaut à l'égalité $\bar{x} = \bar{y}$ des classes.

En conclusion: on a un *modèle* pour l'espace $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ des classes d'équivalence des réels modulo les entiers: à une bijection près, c'est le cercle unité du plan complexe.

ii) $U_n = \{z \in \mathbf{C}, z^n = 1\} = \{e^{\frac{2\pi i l}{n}}, l \in [n]\}$.

L'application $\varphi : \mathbf{Z} \rightarrow U_n : x \mapsto e^{\frac{2\pi i x}{n}}$ est surjective. Si n divise $y - x$, on a

$$e^{\frac{2\pi i y}{n}} = e^{\frac{2\pi i(x + y - x)}{n}} = e^{\frac{2\pi i x}{n}} e^{\frac{2\pi i(y - x)}{n}} = e^{2\pi i x}.$$

Comme au i), φ est constante sur les classes modulo n . Elle passe donc au quotient, i.e. on peut définir

$$\bar{\varphi} : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow U_n : \bar{x} \mapsto e^{\frac{2\pi i x}{n}}.$$

L'injectivité de $\bar{\varphi}$ se vérifie comme au i).