Fiche de TD 2

Exercice 1 Soit $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ la liste des diviseurs positifs de l'entier naturel $n \geq 2$. Montrer que

$$n^k = (\Pi_{i=1}^k d_i)^2.$$

[*Dresser la liste des diviseurs de* n *en observant que si* $d \mid n$ *alors* $\frac{n}{d} \mid n$]

Exercice 2 (Points entiers sur un cercle)
Pour $k \in \mathbf{N}$, on se propose ici d'étudier les solutions $(a, b) \in \mathbf{N}^{\star 2}$ de l'équation

$$2^k = a^2 + b^2 \qquad (E_k)$$

1. Montrer que si $4 \mid a^2 + b^2$, alors a et b sont des entiers pairs. [*Tester suivant la parité de* a *et de* b.]
2. Le cas pair: $k = 2n$.
Montrer que l'équation (E_{2n}) n'admet pas de solution $(a, b) \in \mathbf{N}^{\star 2}$. [*Par l'absurde, en considérant le plus petit entier* n *pour lequel une solution* (a, b) *existe.*]
3. Le cas impair: $k = 2n + 1$.
i) Donner une solution $(a, b) \in \mathbf{N}^{\star 2}$ de l'équation (E_{2n+1}).
ii) Montrer l'assertion: - *pour tout* $n \geq 0$*, l'équation* (E_{2n+1}) *admet une solution unique* $(a, b) \in \mathbf{N}^{\star 2}$ - par récurrence sur l'entier $n \geq 0$.

Exercice 3 (Nombres harmoniques)
On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.
i) Montrer par récurrence sur $n \geq 2$ l'assertion
$\mathcal{H}_n$: - Il existe un entier P_n impair et un entier Q_n pair tels que $H_n = \frac{P_n}{Q_n}$.
[*Commencer par vérifier* $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{2n} \Rightarrow \mathcal{H}_{2n+1}$ *en séparant les entiers pairs et impairs de* H_{2n}]
ii) En déduire que si $n \geq 2$, H_n n'est pas un entier.

Division euclidienne, pgcd, identité de Bézout, lemme de Gauss

Exercice 4 Le capitaine Crochet a cinq matelots entre lesquels il doit partager équitablement un trésor. Une fois qu'il a pris sa part, il reste 1723 pièces d'or pour son équipage, qu'il distribue ainsi: chaque matelot est associé à un doigt de sa main droite; du crochet de la main gauche, il désigne ses doigts dans l'ordre: pouce, index, majeur, annulaire, auriculaire, annulaire, majeur, index, pouce, index, etc.; à chaque doigt désigné le matelot correspondant prend une pièce. Sur quel doigt le capitaine va-t-il terminer son décompte?
[*Observer ce qui se passe sur le pouce.*]

Exercice 5 Un jeu: n allumettes sont disposées sur une table et deux joueurs en retirent chacun à leur tour une, deux, ou trois, le perdant étant celui qui retire la dernière allumette.

Notons n_k le nombre d'alumettes restantes après k tirages et r_k le reste de la division euclidienne de n_k par 4.
i) On suppose $n_k \geq 4$. Montrer que si $r_k = 1$, alors après le tirage suivant $r_{k+1} \neq 1$, et que si $r_k \neq 1$, alors au tirage suivant on peut faire en sorte que $r_{k+1} = 1$.
ii) En déduire une stratégie gagnante. [*Observer la fin de partie.*]

Exercice 6 i) Calculer $\text{pgcd}(123, 45)$ par l'algorithme d'Euclide.
ii) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pgcd $(n^3 + n + 1, n^2 + n + 1) \in \{1, 3\}$.

Exercice 7 (Ecriture d'un entier en base b)

Soit $b \geq 2$ un entier naturel. Pour $N \in \mathbf{N}^\star$, on se propose de montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}^\star$ et une suite $(d_k)_{0 \leq k \leq n-1}$, $d_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}, d_{n-1} \neq 0$, uniques tels que

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k b^k.$$

1. (Unicité) On suppose $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k b^k$.
i) Montrer que $b^{n-1} \leq N \leq b^n - 1$.
ii) Dire pourquoi l'entier n est déterminé par N.
iii) Démontrer que la suite $(d_0, \ldots, d_{n-1})$ est déterminée par N. [*Récurrence sur* $i \leq n-1$]

2. (Existence). On définit deux suites d'entiers $(q_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(d_k)_{k \in \mathbf{N}}$ par $q_0 = N$ et pour tout entier naturel k, q_{k+1} et d_k désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de q_k par b.
i) On fixe un entier $k \geq 1$. Exprimer N en fonction de $k, d_0, \ldots, d_{k-1}$ et q_k.
ii) Démontrer que la suite $(q_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang et qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k b^k$.
iii) Ecrire en base deux le nombre qui s'écrit 391 en base dix.

Exercice 8 (divisibilité en base b)
Soit $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k b^k$ l'écriture de $N \in \mathbf{N}^\star$ en base b et $S(N) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k$.
i) En base dix, confirmer que N est divisible par 2 ou 5 ssi d_0 l'est.
ii) Montrer que $b - 1$ divise $N - S(N)$. [*Factoriser* $b^k - 1, k \geq 1$]
iii) En base dix, démontrer que N est divisible par 9 ssi $S(N)$ l'est. En déduire le même critère en remplaçant 9 par 3. Comment adapter ce critère à la divisibilité par 11?

Remarques: Ces critères de divisibilité sont des conséquences faciles des propriétés de la congruence.

Exercice 9 Soit $P_f(\mathbf{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}$.
En vous servant de l'écriture des entiers en base deux, montrer que $P_f(\mathbf{N})$ est un ensemble dénombrable.
[*Définir* $f : P_f(\mathbf{N}) \to \mathbf{N}$ *en se servant de la fonction indicatrice* $\mathbf{1}_A$ *de la partie* $A \subset \mathbf{N}$.]

Exercice 10 Calculer d =pgcd $(210, 48)$. Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ l'équation $210x + 48y = d$.

Exercice 11 Soit $a, m, n \in \mathbf{N}^\star$ avec $n > m$.

Démontrer l'égalité
$$\mathrm{pgcd}(a^n-1,a^m-1)=a^{\mathrm{pgcd}(n,m)}-1.$$

[*On pourra écrire* a^n-1 *en fonction de* a^m-1 *et* $a^{n-m}-1$, *montrer successivement* pgcd $(a^n-1,a^m-1)=$ pgcd $(a^{n-m}-1,a^m-1)=$ pgcd (a^r-1,a^m-1) où r est le reste de la division euclidienne de n par m et *conclure en se servant de l'algorithme d'Euclide.*]

Exercice 12

i) Montrer que si l'entier n est multiple de 33 et de 77 alors il est multiple de 231.

ii) Montrer que pour tout entier n, $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Exercice 13 Soient a, b et $(x_j)_{j\in[n]}$ des entiers naturels non nuls.

i) Démontrer: $\forall j\in[n]$, pgcd $(a,x_j)=1 \quad \Leftrightarrow \quad$ pgcd $(a,\Pi_{j\in[n]}x_j)=1$.

ii) En déduire: $\forall k,l\in\mathbf{N}^\star$, pgcd $(a,b)=1\Leftrightarrow$, pgcd $(a^k,b^l)=1$.

Exercice 14 (Test des racines rationnelles)

Soit $P(X)=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ un polynôme à coefficients entiers.

i) Supposons que $r=\frac{p}{q}$ soit une racine rationnelle de P (p,q des entiers étrangers). Montrer que p divise a_0 et q divise a_n.

ii) Exemple: soient $n\in\mathbf{N}^\star$ et $k\in\mathbf{N}^\star$ tels que $n^{\frac{1}{k}}$ soit rationnel. Montrer que $n^{\frac{1}{k}}$ est un entier.

Exercice 15

Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}^\star$, $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ n'est pas un nombre rationnel. [*Procéder par l'absurde.*]

Exercice 16

Soit x un réel. On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que x^n et x^{n+1} sont entiers. Montrer que x est un entier.