Fiche de TD 1

Exercice 1 Trouver une application $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ qui est, respectivement, surjective et non injective, injective et non surjective, bijective.

Exercice 2

i) Montrer que l'application

$$f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} : (m, n) \mapsto 2^m(2n + 1) - 1$$

est une bijection.
[*Pour obtenir un antécédent de l'entier* $l \in \mathbf{N}$, *penser à la partie* $A = \{k \in \mathbf{N}$ *tel que* $2^k \mid l + 1\}$.]

ii) Montrer que l'application

$$g : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} : (m, n) \mapsto \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} + m$$

est une bijection.

iii) Montrer que pour tout entier $r \geq 1$, il existe une bijection $f_r : \mathbf{N}^r \to \mathbf{N}$.

Dans ce qui suit, pour $n \in \mathbf{N}^\star$, l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ est noté $[n]$.

Exercice 3 Soient $E = [n]$ et $F = [m]$. On note F^E l'ensemble des applications de E vers F.
i) Expliciter une bijection $\varphi : F^E \to F^{|E|}$. En déduire $|F^E|$.
[*Une application est déterminée par la liste de ses valeurs.*]
ii) Soit $A \in P(E)$. On note $\mathbf{1}_A : E \to \{0, 1\}$ l'indicatrice de A: $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Montrer que

$$\psi : P(E) \to \{0, 1\}^E : A \mapsto \psi(A) = \mathbf{1}_A$$

est une bijection. En déduire le cardinal $|P(E)|$.

iii) Retrouver le cardinal $|P([n])|$ par une récurrence sur n.
[Pour l'hérédité, se servir des parties $X = \{A \in P([n+1]), n+1 \notin A\}$ *et* $Y = \{A \in P([n+1]), n+1 \in A\}$.]

Exercice 4

i) Donner une injection naturelle $\mathbf{N} \to P(\mathbf{N})$.

ii) (Lemme de Cantor) Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f : \mathbf{N} \to P(\mathbf{N})$.
[*Considérer* $A = \{n \in \mathbf{N}, n \notin f(n)\}$.]

Exercice 5 Sur l'ensemble $E = [n]$, combien y-a-t-il de relations binaires? de relations réflexives? symétriques? réflexives et symétriques?
[*Une relation est définie par son graphe* $\Gamma \subset E \times E$.]

Exercice 6 On note $S^1 = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité et $U_n = \{z \in \mathbf{C}, z^n = 1\}$ l'ensemble des racines $n-$ièmes de l'unité.

i) Sur $\mathbf{R}$, montrer que la relation $x \sim y$ si $x - y \in \mathbf{Z}$ est d'équivalence.
Notons $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \subset P(\mathbf{R})$ l'ensemble de ses classes. Montrer que $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to S^1 : \overline{x} \mapsto e^{2\pi i x}$ est une bijection.
[*Commencer par* $\mathbf{R} \to S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$]

ii) On fixe un entier naturel $n \geq 2$. Sur $\mathbf{Z}$, montrer que la relation $x \sim y$ si $n \mid x - y$ est d'équivalence.
Notons $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \subset P(\mathbf{Z})$ l'ensemble de ses classes. Montrer que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to U_n : \overline{x} \mapsto e^{\frac{2\pi i x}{n}}$ est une bijection.
[*Commencer par* $\mathbf{Z} \to U_n : x \mapsto e^{\frac{2\pi i x}{n}}$]

iii) On reprend la relation du i) sur $\mathbf{Q}$. Trouver une bijection

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to \bigcup_{n \in \mathbf{N}^\star} U_n.$$

Exercice 7 Sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, on pose $(a, b) \sim (c, d)$ si $ad = bc$. Montrer que la relation $\sim$ est d'équivalence.
Si l'on note la classe de (a, b) par $\frac{a}{b}$, l'ensemble quotient $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \setminus \{0\})/\sim$ s'identifie à $\mathbf{Q}$.

Exercice 8 On dit que la suite rationnelle $(r_n) \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall A \in \mathbf{Z}_{\geq 0},\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall m, n \geq N,\ |r_m - r_n| < \frac{1}{A}.$$

Sur l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbf{Q})$ des suites rationnelles de Cauchy, montrer que la relation $(r_n) \sim (s_n)$ si $\lim_{n\to\infty} r_n - s_n = 0$ est d'équivalence.

Remarque (cf le cours d'Analyse): l'ensemble quotient $\mathcal{C}(\mathbf{Q})/\sim$ s'identifie à $\mathbf{R}$.

Exercice 9 Si $k, l \in \mathbf{N}$ posons $k \leq l$ si $k \mid l$.

i) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$. Est-elle totale?

ii) Même question avec $\{2^q, q \in \mathbf{N}\}$ à la place de $\mathbf{N}$.