Racines n–ièmes

Théorème. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soit $x > 0$ un nombre réel. Il existe un unique réel r tel que $r^n = x$. On le note $r = \sqrt[n]{x}$.

Démonstration : Soit $A = \{a \in \mathbb{R} \,:\, a^n \leqslant x\}$. L'ensemble $A \neq \varnothing$ car $0 \in A$.

L'ensemble A est majoré par $1 + x$ car

$$\forall\, a \in A,\, a^n = x \Rightarrow a^n \leqslant 1 + x \Rightarrow a^n \leqslant (1+x)^n$$

$$\Rightarrow a \leqslant 1 + x\ .$$

Donc il existe $r = \sup A$.

Si $x \geqslant 1$, alors $1^n = 1 \leqslant x \Rightarrow 1 \in A \Rightarrow 1 \leqslant r \Rightarrow 0 < r$.

Si $0 < x < 1$, alors $x^n \leqslant x \Rightarrow x \in A \Rightarrow 0 < x \leqslant r$.

Donc dans tous les cas $r > 0$.

Montrons que $r^n = x$.

Par l'absurde.

Si $r^n < x$, alors soit

$$0 < \epsilon < \frac{1}{n}\left(1 - \frac{r^n}{x}\right)$$

c-à-d

$$\frac{r^n}{x} < 1 - n\epsilon\ .$$

On a :

$$\left(\frac{r}{1-\epsilon}\right)^n = \frac{r^n}{(1-\epsilon)^n}$$

Or, $(1-\epsilon)^n \geqslant 1 - n\epsilon$ d'après l'inégalité de Bernoulli. Donc

$$\left(\frac{r}{1-\epsilon}\right)^n \leqslant \frac{r^n}{1-n\epsilon} \leqslant \frac{r^n}{\frac{r^n}{x}} = x$$

mais alors $\frac{r}{1-\epsilon} \in A \Rightarrow r \leqslant \frac{r}{1-\epsilon}$ absurde ! †

Si $r^n > x$, soit

$$0 < \epsilon < \frac{1}{n}\underbrace{\left(1 - \frac{x}{r^n}\right)}_{>0}$$

c-à-d

$$\frac{x}{r^n} < 1 - n\epsilon\ .$$

†. car $r < \frac{r}{1-\epsilon}$.

Alors comme $r(1-\epsilon) < r$, il existe $a \in A$ tel que

$$r(1-\epsilon) < a \leqslant r \ .$$

Alors

$$(r(1-\epsilon))^n \leqslant a^n \leqslant x$$

$$\Rightarrow r^n(1-n\epsilon) \leqslant x$$

d'après l'inégalité de Bernoulli

$$\Rightarrow \frac{x}{r^n} < 1 - n\epsilon \leqslant \frac{x}{r^n}$$

absurde !

Conclusion. $r^n = x$. **Q.e.d.**