Chapitre IV
Règle de L'Hospital

Proposition.

i) Soient $a < b$ réels. Soient f, g dérivables sur $]a, b[$. On suppose que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = 0$$

ou bien

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} |f(x)| = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} |g(x)| = \infty \ .$$

Si $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

ii) Soit $A \in \mathbb{R}$. Soient f, g dérivables sur $]A, +\infty[$. On suppose que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

ou bien

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \lim_{x \to +\infty} |g(x)| = \infty \ .$$

Si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Démonstration :

i)

Supposons que $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$ †.

Supposons que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = 0 \ .$$

†. Si $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, alors $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ et on est ramené au cas où $l = 0$.

Alors les fonctions $\overline{f}$ et $\overline{g}$ définies par :

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\overline{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x > a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

sont contniues sur $[a, b[$.

Soit $\epsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\, a < t < a + \eta, \left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - l\right| < \epsilon \ .$$

Soit $a < x < a + \eta$. D'après le théorème des accroissements finis,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overline{f}(x) - \overline{f}(a)}{\overline{g}(x) - \overline{g}(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

pour un certain $a < c_x < x$. En particulier, $a < c_x < a + \eta$ et

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - l\right| < \epsilon \ .$$

Donc, $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Supposons que $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = +\infty$.

Soit $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$.

Pour tous $a < x, y < b$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(y) + f(y)}{g(x) - g(y) + g(y)} \\ &= \frac{\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} + \frac{f(y)}{g(x)-g(y)}}{1 + \frac{g(y)}{g(x)-g(y)}} \ . \end{aligned}$$

Soit $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall\, a < t < a + \eta_1, \left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - l\right| < \epsilon \ .$$

Soit $a < y < a + \eta_1$.
Comme $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} g(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} \frac{f(y)}{g(x)-g(y)} = \lim_{\substack{x\to a\\x>a}} \frac{g(y)}{g(x)-g(y)} = 0$.
Donc il existe $0 < \eta_2 < y - a$ tel que :

$$\forall\, a < x < a + \eta_2,\ \left|\frac{f(y)}{g(x)-g(y)}\right|,\ \left|\frac{g(y)}{g(x)-g(y)}\right| < \epsilon\ .$$

Donc, si $a < x < a + \eta_2$, alors :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} + \frac{f(y)}{g(x)-g(y)}}{1 + \frac{g(y)}{g(x)-g(y)}} - l\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - l + \frac{f(y)}{g(x)-g(y)} - l\frac{g(y)}{g(x)-g(y)}}{1 + \frac{g(y)}{g(x)-g(y)}}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{f'(t)}{g'(t)} - l + \frac{f(y)}{g(x)-g(y)} - l\frac{g(y)}{g(x)-g(y)}}{1 + \frac{g(y)}{g(x)-g(y)}}\right|$$

(pour un certain $x < t < y$ d'après le théorème des accroissements finis)

$$\leqslant \frac{\epsilon + \epsilon + |l|\epsilon}{1-\epsilon} = \epsilon\frac{2+|l|}{1-\epsilon}$$

$$< 2(2 + |l|)\epsilon$$

(si on suppose $1 - \epsilon > \frac{1}{2}$). Donc $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

ii)

On se ramène au cas précédent en considérant les fonctions $\widetilde{f}(x) = f\left(x^{-1}\right)$, $\widetilde{g}(x) = g(x^{-1})$. **Q.e.d.**

Applications

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{(e^x)'}{x'}}_{=\frac{e^x}{1}=e^x} = +\infty\ .$$

—

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x'}{(\ln x)'}}_{=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x} = +\infty \ .$$

—

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+} \underbrace{\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}}_{=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-x} = 0 \ .$$