

Exponentielle complexe

Proposition. Soit $z \in \mathbb{C}$. La suite

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

converge dans $\mathbb{C}$.

On note $\boxed{\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n}$.

Démonstration : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, posons

$$e_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $n > m$, alors

$$\begin{aligned} e_n(z) - e_m(z) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} - \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{z^k}{m^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^m \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m^k} \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

Posons

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, c_{p,q} = \begin{cases} \frac{q(q-1)\dots(q-p+1)}{q^p} & \text{si } 0 \leq p \leq q, \\ 0 & \text{si } q < p. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1 - \frac{1}{q})\dots(1 - \frac{p-1}{q}) & \text{si } 0 \leq p \leq q, \\ 0 & \text{si } q < p. \end{cases}$$

Avec ces notations :

$$e_n(z) - e_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_{k,n} - c_{k,m}) \frac{z^k}{k!}$$

[†] or, $\forall k, c_{k,n} \geq c_{k,m}$ [‡] donc

$$\begin{aligned} |e_n(z) - e_m(z)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (c_{k,n} - c_{k,m}) \frac{|z|^k}{k!} \\ &= e_n(|z|) - e_m(|z|) . \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite

$$e_n(x), n \in \mathbb{N}_{>0}$$

est convergente donc est de Cauchy. en particulier, pour $x = |z|$,

$$\exists N \in \mathbb{N}_{>0}, \forall n \geq m \geq N, |e_n(z) - e_m(z)| \leq e_n(|z|) - e_m(|z|) < \epsilon$$

donc la suite

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}_{>0}$$

est de Cauchy et converge dans $\mathbb{C}$.

Q.e.d.

Lemme. Si (z_n) est une suite complexe telle que

$$\lim_n z_n = z \in \mathbb{C},$$

alors

$$\lim_n e_n(z_n) = \exp(z) .$$

Démonstration : En effet, pour tout n , $|e_n(z)| \geq (1 - \frac{|z|}{n})^n$. Donc $|\exp(z)| \geq \exp(-|z|)$.

En particulier, $\exp(z) \neq 0$.

Il suffit donc de montrer que $\lim_n \frac{e_n(z_n)}{e_n(z)} = 1$.

Or, si $n \geq 1$,

$$\frac{e_n(z_n)}{e_n(z)} - 1 = \left(\frac{n + z_n}{n + z} \right)^n - 1$$

[†]. c'est une somme finie car $c_{k,n} = c_{k,m} = 0$ si $k > \max\{m, n\}$.

[‡]. en effet, si $1 \leq k \leq m \leq n$, alors

$$c_{k,n} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\geq 1 - \frac{1}{m}} \geq \underbrace{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right)}_{\geq 1 - \frac{k-1}{m}} = c_{k,m}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{z_n - z}{n + z}\right)^n - 1 \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{z_n - z}{n + z}\right)^k \\
&\leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left|\frac{z_n - z}{n + z}\right|^k \\
&= \left(1 + \frac{|z_n - z|}{|n + z|}\right)^n - 1 \\
&= e_n \left(\frac{n|z_n - z|}{|n + z|}\right) - 1 \\
&\longrightarrow_{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

car la suite $\left(\frac{n|z_n - z|}{|n + z|}\right)_n$ est réelle et $\lim_n \frac{n|z_n - z|}{|n + z|} = 0$.

Q.e.d.

On déduit de ce lemme comme pour le cas réel :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2) .$$

Proposition. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, alors

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathbb{C}, z \neq z_0}} \frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z_0) .$$

Démonstration :

Comme

$$\frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z_0) \frac{\exp(z - z_0) - 1}{z - z_0},$$

il suffit de démontrer le cas $z_0 = 0$.

Or,

$$\forall z \neq 0, \forall n, \left| \frac{e_n(z) - 1}{z} - 1 \right| \leq \frac{e_n(|z|) - 1}{|z|} - 1$$

d'où, quand $n \rightarrow \infty$,

$$\left| \frac{\exp(z) - 1}{z} - 1 \right| \leq \frac{\exp(|z|) - 1}{|z|} - 1 \xrightarrow[z \neq 0]{z \rightarrow 0} 0$$

d'après le cas réel.

Q.e.d.

Définition. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$$

$$\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} .$$

Exercice. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\cos' = -\sin, \sin' = \cos .$$