Développement du sinus en produit infini (Euler)

Lemme. *Théorème de convergence dominée.* Pour tout $n \geqslant 1$, soit $(a_{k,n})_{k\geqslant 1}$ une suite réelle à termes $\geqslant 0$.

On suppose

i) $\forall\, n \geqslant 1$, $\sum_{k\geqslant 1} a_{k,n} < \infty$.

ii) $\forall\, k \geqslant 1$, $\lim_{n\infty} a_{k,n} = a_k \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

iii) $\exists\, (A_k)_{k\geqslant 1}$, $\forall\, k, n$, $a_{k,n} \leqslant A_k$ et $\sum_{k\geqslant 1} A_k < \infty$.

ALORS, la série $\sum_{k\geqslant 1} a_k$ converge et

$$\lim_n \sum_{k\geqslant 1} a_{k,n} = \sum_{k\geqslant 1} \lim_n a_{k,n} \ .$$

Démo. Soit $p \geqslant 1$. On a

$$\sum_{k\geqslant 1} a_{k,n} = \sum_{k=1}^{p} a_{k,n} + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_{k,n} \tag{1}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p} a_{k,n} + \sum_{k=p+1}^{\infty} A_k \tag{2}$$

$$\Rightarrow \limsup_n \sum_{k\geqslant 1} a_{k,n} \leqslant \sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{\infty} A_k \tag{3}$$

$$\leqslant \sum_{k\geqslant 1} a_k \tag{4}$$

lorsque $p \to \infty$.

On a aussi :

$$\forall\, p \geqslant 1,\ \sum_{k\geqslant 1} a_{k,n} \geqslant \sum_{k=1}^{p} a_{k,n} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \forall\, p \geqslant 1,\ \liminf_n \sum_{k\geqslant 1} a_{k,n} \geqslant \sum_{k=1}^{p} a_k \tag{6}$$

$$\Rightarrow \liminf_n \sum_{k\geqslant 1} a_{k,n} \geqslant \sum_{k\geqslant 1} a_k \ . \tag{7}$$

Donc

$$\sum_{k\geqslant 1} a_k = \liminf_n \sum_{k\geqslant 1} a_{k,n} = \limsup_n \sum_{k\geqslant 1} a_{k,n} = \lim_n \sum_{k\geqslant 1} a_{k,n} \ .$$

Lemme.

$$\forall\, n \geqslant 1,\, \forall\, x \in \mathbb{R},\, \sin(nx) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin(x + \frac{k\pi}{n}) \ .$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\sin nx &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} && (8)\\
&= \frac{e^{-inx}}{2i}(e^{2inx} - 1) && (9)\\
&= \frac{e^{-inx}}{2i}\prod_{k=0}^{n-1}(e^{2ix} - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}) && (10)\\
&= \frac{e^{-inx}}{2i}\prod_{k=0}^{n-1}(e^{i(x-\frac{k\pi}{n})}2i\sin(x + \frac{k\pi}{n})) && (11)\\
&= \frac{e^{-inx}}{2i}e^{inx}e^{-i\frac{n(n-1)}{2n}\pi}(2i)^n\prod_{k=0}^{n-1}\sin(x + \frac{k\pi}{n}) && (12)\\
&= 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin(x + \frac{k\pi}{n}). && (13)
\end{aligned}$$

Q.e.d.

En particulier,

$$\forall\, x \neq 0,\, \frac{\sin nx}{\sin x} = \prod_{k=1}^{n-1}\sin(x + \frac{k\pi}{n}) \qquad (14)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(x\to 0)} n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{n}). \qquad (15)$$

Lemme.
Si $n = 2q+1$, alors

$$\sin nx = \sin x \prod_{k=1}^{q}\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right).$$

Démonstration :

$$\sin nx = 2^{n-1}\sin x\prod_{k=1}^{2q}\sin(x + \frac{k\pi}{n}) \qquad (16)$$

$$= 2^{n-1}\sin x \prod_{k=1}^{q}\sin(x+\frac{k\pi}{n})\prod_{k=q+1}^{2q}\sin(x+\frac{k\pi}{n}) \tag{17}$$

$$= 2^{n-1}\sin x(-1)^q \prod_{k=1}^{q}\sin(x+\frac{k\pi}{n})\prod_{k=q+1}^{2q}\sin(x+\frac{k\pi}{n}-\pi) \tag{18}$$

$$= 2^{n-1}\sin x(-1)^q \prod_{k=1}^{q}\sin(x+\frac{k\pi}{n})\prod_{k=-q}^{-1}\sin(x+\frac{k\pi}{n}) \tag{19}$$

$$= 2^{n-1}\sin x(-1)^q \prod_{k=1}^{q}\underbrace{\sin(x+\frac{k\pi}{n})\sin(x-\frac{k\pi}{n})}_{=\sin^2 x-\sin^2\frac{k\pi}{n}} \tag{20}$$

$$= 2^{n-1}\sin x \prod_{k=1}^{q}\sin^2\frac{k\pi}{n}\prod_{k=1}^{q}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}\right) \tag{21}$$

$$= 2^{n-1}\sin x \prod_{k=1}^{q}\sin\frac{k\pi}{n}\sin(\pi-\frac{k\pi}{n})\prod_{k=1}^{q}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}\right) \tag{22}$$

$$= \underbrace{2^{n-1}\prod_{k=1}^{2q}\sin\frac{k\pi}{n}}_{=n}\sin x\prod_{k=1}^{q}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}\right) \tag{23}$$

$$= n\sin x\prod_{k=1}^{q}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}\right). \tag{24}$$

Q.e.d.

Théorème. *Développement d'Euler du sinus en produit infini.*

$$\forall\, 0\neq x,\ \frac{\sin x}{x} = \lim_n \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Démonstration :

On supposera $0<|x|<\pi$. Le cas général est laissé en exercice.

Il s'agit de démontrer que

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Le terme de droite est bien une série convergente car $\ln\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\sim -\frac{x^2}{k^2\pi^2}$ et la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ converge.

Supposons $n = 2q+1$ impair. Alors si on pose $t = nx$ dans le lemme précédent :

$$\forall\, 0 < |t| < \pi,\ \frac{\sin t}{t} = \frac{\sin\frac{t}{n}}{\frac{t}{n}} \prod_{k=1}^{q} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{t}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}\right) \tag{25}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{\sin t}{t} = \ln\left(\frac{\sin\frac{t}{n}}{\frac{t}{n}}\right) + \sum_{k=1}^{q} \ln\left(1 - \frac{\sin^2\frac{t}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}\right) \tag{26}$$

$$= \ln\left(\frac{\sin\frac{t}{n}}{\frac{t}{n}}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \tag{27}$$

où

$$\forall\, k, n \geqslant 1,\ a_{k,n} = \begin{cases} \ln\left(1 - \frac{\sin^2\frac{t}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}\right) & \text{si } k \leqslant q \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or,

$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$$

†

donc

$$\forall\, n \text{ impair } \geqslant |t| > 0,\ \forall\, k \leqslant q = \frac{n-1}{2} \left|\frac{t}{n}\right| \leqslant \frac{\pi}{2},\ \frac{k\pi}{n} \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{28}$$

$$\Rightarrow \forall\, n \text{ impair } \geqslant |t| > 0,\ \forall\, 1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2},\ \frac{\sin^2\frac{t}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{n}} \leqslant \frac{\left(\frac{t}{n}\right)^2}{\left(\frac{2}{\pi}\frac{k\pi}{n}\right)^2} \tag{29}$$

$$\leqslant \frac{t^2}{4k^2} \tag{30}$$

$$\Rightarrow \forall\, n \text{ impair } \geqslant |t| > 0,\ \forall\, k \geqslant 1,\ 0 \leqslant -a_{k,n} \leqslant -\ln\left(1 - \frac{t^2}{4k^2}\right). \tag{31}$$

Comme, de plus,

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{4k^2}\right) < \infty\ ^{\ddagger} \tag{32}$$

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \lim -a_{k,n} = -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2}\right), \tag{33}$$

†. pour la première inégalité, il suffit de remarquer que $\forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}$, $x < \tan x \Rightarrow \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$.

d'après le théorème de convergence dominée,

(34) $$\forall\, 0 < |t| < \pi,\ \ln \frac{\sin t}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Q.e.d.

Deux applications

Formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim_n \frac{2.2.4.4...(2n)(2n)}{1.3.3.5...(2n-1)(2n+1)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Démonstration : On applique la formule d'Euler à $x = \frac{\pi}{2}$:

(35) $$\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\frac{\pi^2}{2^2}}{k^2\pi^2}\right)$$

(36) $$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

(37) $$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)$$

il suffit alors d'inverser ! **Q.e.d.**

Remarque. On retrouve ainsi la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad .$$

En effet, admettons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $n! \sim C\sqrt{n}\frac{n}{e}^n$.[†] Mais alors

(38) $$\frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n+1)} = \frac{2^2.4^2.....(2n-2)^2(2n)^2}{(1.3....(2n-3)(2n-1))^2(2n+1)}$$

(39) $$= 2^{2n}n!^2\left(\frac{(2n)!!}{(2n)!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}$$

(40) $$= 2^{2n}n!^2\left(\frac{2^n n!}{(2n)!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}$$

†. On note $(2n)!! = 2.4.6....(2n-2)(2n)$, $(2n-1)!! = 1.3....(2n-3)(2n-1)$

$$= \frac{2^{4n} n!^4}{(2n)!^2(2n+1)} \tag{41}$$

$$\sim \frac{2^{4n} C^4 n^2 \frac{n^{4n}}{e^{4n}}}{C^2 (2n) \frac{(2n)^{4n}}{e^{4n}} (2n+1)} \tag{42}$$

$$\sim \frac{C^2}{4} \tag{43}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{C^2}{4} \tag{44}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\pi} = C. \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Démonstration : Soit *psilon* > 0. Comme $\ln(1-u) = -u + o(u)$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall\, |u| < \eta,\ |\ln(1-u) + u| \leqslant |u|\epsilon\ .$$

Alors on a

$$\forall\, k \geqslant 1, \forall\, 0 < |x| < \eta,\ |\ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) + \frac{x^2}{k^2\pi^2}| \leqslant \frac{x^2}{k^2\pi^2}\epsilon \tag{46}$$

$$\Rightarrow |\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) + \frac{x^2}{k^2\pi^2}| \leqslant x^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}}_{=:K} \epsilon \tag{47}$$

$$= K\epsilon \tag{48}$$

$$\Rightarrow \forall\, |x| < \eta, \left| \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) + x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} \right| \leqslant K\epsilon \tag{49}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = -\frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)}{\pi^2} x^2 + o(x^2). \tag{50}$$

Or,

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x}\right) \tag{51}$$

$$= \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \tag{52}$$

$$= -\frac{x^2}{6} + o(x^2). \tag{53}$$

Donc par unicité des développements limités, la formule d'Euler du sinus donne :

$$-\frac{1}{6} = -\frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}{\pi^2} \tag{54}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{55}$$

Q.e.d.