

Composée de développements limités

Proposition. Soient f, g deux fonctions telles que

- f admet un développement limité à l'ordre n en y_0 ,
- g un développement limité à l'ordre n en x_0 et
- $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = y_0$.

ALORS $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0 .

De plus, si

$$f(y) = F_n(y - y_0) + o((y - y_0)^n),$$

$$g(x) = G_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

pour certains $F_n(X), G_n(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ *polynômes de degrés $\leq n$* , on a :

$$f \circ g(x) = H_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

où $F_n(G_n(X) - y_0) = H_n(X) \bmod X^{n+1}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple. Soient $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

On a

$$f(x) = F_4(x - 1) + o((x - 1)^4), \quad g(x) = G_4(x) + o((x^4))$$

avec

$$F_4(T) = 1 - T + T^2 - T^3 + T^4, \quad G_4(T) = 1 - \frac{T^2}{2} + \frac{T^4}{24}.$$

Or,

$$F_4(G_4(T) - 1) = \underbrace{1 + \frac{T^2}{2} + \frac{5T^4}{24}}_{=: H_4(T)} \bmod T^5$$

$$\Rightarrow f \circ g(x) = \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + 5\frac{x^4}{24} + o(x^4).$$