Développement décimal d'un nombre réel

Exemples.

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{1}{3} = 0,33...$$

$$\sqrt{2} - 1 = 0,41421356...$$

Soit $0 \leqslant x < 1$. On définit par récurrence une suite $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers par

$$a_0(x) = 0$$

et

$$\forall\, n \geqslant 1,\ a_n(x) = \max\left\{ b \in \mathbb{N} \ :\ a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{b}{10^n} \leqslant x \right\}$$

c-à-d

$$\frac{a_n(x)}{10^n} \leqslant x - a_0 - \frac{a_1}{10} - ... - \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} < \frac{a_n(x)}{10^n} + \frac{1}{10^n} \ .$$

« L'entier $a_n(x)$ est le $n-$ième chiffre de x après la virgule. »

Proposition.

i) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n(x) \in \{0, 1, ..., 9\}$.

ii) $\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geqslant N,\ a_n(x) \neq 9$ [†].

Démonstration : Posons $a_k = a_k(x)$ pour tout k.

i)

Soit $n \geqslant 1$. Par maximalité de a_{n-1},

$$x < a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_{n-2}}{10^{n-2}} + \frac{a_{n-1} + 1}{10^{n-1}}$$

Or,

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10^n} \leqslant x$$

donc

$$\frac{a_n}{10^n} \leqslant x - a_0 - \frac{a_1}{10} - ... - \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} < \frac{1}{10^{n-1}}$$

$$\Rightarrow a_n < 10 \ .$$

†. *c-à-d* la suite $a_n(x)$ n'est pas stationnaire égale à 9 à partir d'un certain rang

ii)

Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant N$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leqslant x$$

$$\Rightarrow \sum_{k=N}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leqslant \underbrace{x - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{10^k}}_{=:\alpha} < \frac{1}{10^{N-1}}$$

(par maximalité de a_{N-1}).

Si, *par l'absurde*, $\forall\, n \geqslant N$, $a_n = 9$, alors

$$\forall\, n \geqslant N,\ \sum_{k=N}^{n} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^N} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-N+1}}}{1 - \frac{1}{10}} \leqslant \alpha$$

$$\Rightarrow \forall\, n \geqslant N,\ \frac{1}{10^{N-1}} - \frac{1}{10^n} \leqslant \alpha$$

en laissant tendre n vers ∞, on trouve :

$$\Rightarrow \frac{1}{10^{N-1}} \leqslant \alpha < \frac{1}{10^{N-1}}$$

absurde !

Q.e.d.

Proposition. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers tels que :

$$a_0 = 0,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \in \{0, ..., 9\},$$

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geqslant N,\ a_n \neq 9.$$

Soit $x = \sup\left\{a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10^n}\ :\ n \in \mathbb{N}\right\}$.
Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_n(x)$.
Démonstration : Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 1$. alors par définition,

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_N}{10^N} \leqslant x$$

soit $n_0 > N$ tel que $a_{n_0} \neq 9$. Pour tout $n > n_0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} &= \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=N+1}^{n_0} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=N+1}^{n_0} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{9}{10^k} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=N+1}^{n_0} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^{n_0}}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
x &\leqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=N+1}^{n_0} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^{n_0}} \\
&< \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{10^k} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{n_0} \frac{9}{10^k} + \frac{1}{10^{n_0}}}_{=\frac{1}{10^N}} \\
&< \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^N} \ .
\end{aligned}$$

Donc $a_N(x) = a_N$. **Q.e.d.**

On déduit des deux propositions le

Théorème. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$a_0 = 0,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \in \{0, ..., 9\},$$

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geqslant N,\ a_n \neq 9 \ .$$

Les applications

$$[0,1[\longrightarrow \mathscr{E}$$

$$x \longmapsto (a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\sup\left\{\textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \ :\ n \in \mathbb{N}\right\} \longleftarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Corollaire. L'ensemble $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

Démonstration : En effet, si on avait $[0,1[=\{x_i \ : \ i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$, on pourrait poser $a_0 = 0$ et

$$\forall\, n \geqslant 1,\ a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n(x_n) \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_n(x_n) = 0 \end{cases}.$$

Alors $x = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \notin \{x_i \ : \ i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$, car

$$\forall\, n \geqslant 1,\ a_n(x) = a_n \neq a_n(x_n),$$

absurde. **Q.e.d.**