Licence de mathématiques
L3, parcours « enseignement » – analyse réelle
examen de deuxième session
jeudi 26 juin 2025
durée 1H30

CORRECTION

Exercice 1 Soient $u_0 = 0$ et $\forall\, n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \frac{2u_n-9}{u_n+8}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -3 \Rightarrow u_n > u_{n+1} > -3$.

Si $u_n > -3$, alors $u_n + 8 \neq 0$ donc u_{n+1} est bien défini et :

$$u_n > u_{n+1} \Leftrightarrow u_n > \frac{2u_n - 9}{u_n + 8}$$

$$\Leftrightarrow u_n^2 + 8u_n > 2u_n - 9$$

car $u_n + 8 > 0$

$$\Leftrightarrow u_n^2 + 6u_n + 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow (u_n + 3)^2 > 0$$

ce qui est vrai car $u_n + 3 > 0$. Donc $u_n > u_{n+1}$.

De plus, $u_{n+1} > -3 \Leftrightarrow \frac{2u_n-9}{u_n+8} > -3$

$$\Leftrightarrow 2u_n - 9 > -3(u_n + 8)$$

$$\Leftrightarrow 5u_n + 15 = 5(u_n + 3) > 0$$

ce qui est vrai. Donc $u_{n+1} > -3$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

La suite (u_n) est donc définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $u_0 = 0 > -3$, décroissante et minorée par -3. Donc (u_n) converge vers un réel $l \geqslant -3$. Par continuité de la fonction $x \mapsto \frac{2x-9}{x+8}$ sur l'intervalle $[-3, +\infty[$, on en déduit que

$$\lim u_n = l = \lim u_{n+1} = \frac{2l - 9}{l + 8}$$

$$\Rightarrow l(l + 8) = 2l - 9$$

$$\Leftrightarrow l^2 + 6l + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (l+3)^2 = 0 \Leftrightarrow l = -3$$

donc $\lim u_n = -3$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_n = \frac{1}{u_n + 3}.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que c'est une suite arithmétique.

D'après a), comme $u_0 = 0 > -3$, $u_n > -3$ pour tout n (par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$). Donc pour tout n, $u_n + 3 > 0$ et $x_n = \frac{1}{u_n+3}$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 3} = \frac{1}{\frac{2u_n - 9}{u_n + 8} + 3}$$

$$= \frac{1}{\frac{2u_n - 9 + 3u_n + 24}{u_n + 8}}$$

$$= \frac{u_n + 8}{5u_n + 15}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{u_n + 8}{u_n + 3}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 + \frac{5}{u_n + 3}\right)$$

$$= \frac{1}{5} + x_n.$$

Donc la suite (x_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{5}$.

d) En déduire u_n en fonction de n.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n = x_0 + \frac{n}{5} = \frac{1}{3} + \frac{n}{5} \Rightarrow u_n = \frac{1}{x_n} - 3$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{n}{5}} - 3$$

$$= -3 + \frac{15}{3n + 5}.$$

Exercice 2 a) La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est-elle absolument convergente ? *Justifier sa réponse.*

On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(-1)^n|}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(-1)^n|}{2n+1}$ diverge et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ n'est pas absolument convergente.

b) On pose $\forall\, n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer que la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ est décroissante et que la suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est croissante.

$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{4n+5} + \frac{(-1)^{2n+1}}{4n+3} = \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+3} < 0$. Donc la suite $(S_{2n})_n \geqslant 0$ décroît strictement.

De même, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{4n+7} + \frac{(-1)^{2n+2}}{4n+5} = -\frac{1}{4n+7} + \frac{1}{4n+5} > 0$. Donc la suite $(S_{2n+1})_n \geqslant 0$ croît strictement.

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $S_{2n} \geqslant S_{2n+1}$. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{4n+3} = S_{2n} - \frac{1}{4n+3} < S_{2n}$.

Donc la suite $(S_{2n})_n$ est décroissante et minorée (par exemple par S_1 car $S_1 \leqslant S_3 \leqslant \ldots \leqslant S_{2n+1} \leqslant S_{2n}$), donc convergente vers un réel $s \in \mathbb{R}$.

De même, la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante et majorée (par exemple par S_0 car $S_0 \geqslant S_2 \geqslant \ldots \geqslant S_{2n} \geqslant S_{2n+1}$), donc convergente vers un réel $s' \in \mathbb{R}$.

Or $S_{2n} - S_{2n+1} = \frac{1}{4n+3} \to_{n\to\infty} 0$. Donc $s - s' = 0$.

Donc la suite (S_n) converge vers $s = s'$ la limite commune des deux sous-suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est donc convergente[†].

d) Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles > 0.

†. on peut montrer que la limite est $\frac{\pi}{4}$ mais ce n'était pas demandé ici.

On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge. Montrer que si $a_n \sim_{n\to\infty} b_n$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ diverge aussi et que $\sum_{k=0}^n a_k \sim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n b_k$.

Soit $1 > \epsilon > 0$. Comme $a_n \sim b_n$, il existe $N > 0$ tel que :

$$\forall n \geqslant N,\ (1-\epsilon)a_n < b_n < (1+\epsilon)a_n$$

.

Soit $n \geqslant N$. On a

$$\frac{\sum_{k=0}^n b_k}{\sum_{k=0}^n a_k} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k + \sum_{k=N}^n b_k}{\sum_{k=0}^n a_k}$$

donc

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k + (1-\epsilon)\sum_{k=N}^n a_k}{\sum_{k=0}^n a_k} \leqslant \frac{\sum_{k=0}^n b_k}{\sum_{k=0}^n a_k} \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k + (1+\epsilon)\sum_{k=N}^n a_k}{\sum_{k=0}^n a_k}$$

donc

$$(1-\epsilon) - \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k}{\sum_{k=0}^n a_k} \leqslant \frac{\sum_{k=0}^n b_k}{\sum_{k=0}^n a_k} \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k}{\sum_{k=0}^n a_k} + (1+\epsilon).$$

Or comme la série de termes positifs $\sum a_n$ diverge,

$$\lim_n \sum_{k=0}^n a_k = +\infty$$

donc

$$\lim_n \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k}{\sum_{k=0}^n a_k} = \lim_n \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k}{\sum_{k=0}^n a_k} = 0$$

donc il existe $N_1 > N$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1,\ 1-2\epsilon \leqslant \frac{\sum_{k=0}^n b_k}{\sum_{k=0}^n a_k} \leqslant 1+2\epsilon$$

donc $\sum_{k=0}^n a_k \sim_n \sum_{k=0}^n b_k$.

Comme $\lim_n \sum_{k=0}^n a_k = +\infty$, on a aussi $\lim_n \sum_{k=0}^n b_k = +\infty$ *c-à-d* la série $\sum b_n$ diverge.

e) Montrer que $\dfrac{1}{2n+1} \sim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+2)-\ln(n+1)}{2}$ et en déduire que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\ln n.$$

On a

$$\ln(n+2)-\ln(n+1)=\ln((n+1)(1+\frac{1}{n+1}))-\ln(n+1)=\ln(1+\frac{1}{n+1}$$
$$\sim_n \frac{1}{n+1}\sim_n\frac{1}{n}.$$

Donc
$$\frac{1}{2n+1}\sim\frac{1}{2n}\sim\frac{\ln(n+2)-\ln(n+1)}{2}.$$

Or, la suite $(\ln(n+2)-\ln(n+1))_n$ est strictement positive et
$$\sum_{k=0}^{n}(\ln(k+2)-\ln(k+1))=\ln(n+2)\to_n\infty.$$

On peut donc appliquer la question précédente. On en déduit :
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2n+1}\sim\sum_{k=0}^{n}\frac{\ln(k+2)-\ln(k+1)}{2}\sim\frac{\ln(n+1)}{2}\sim\frac{\ln n}{2}$$

car $\ln(n+1)=\ln n+\ln(1+\frac{1}{n})=\ln n+o(1)\sim\ln n$.

Exercice 3 Pour tout $x\neq 0$, soit $f(x)=\dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$.

a) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? *Justifier sa réponse.*

Les suites $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ et $y_n=\frac{1}{2n\pi}$ tendent vers 0.

Or
$$\forall n>0,\ f(x_n)=1,\ f(y_n)=0$$

Donc $\lim f(x_n)=1\neq 0=\lim f(y_n)$.

Donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)$ n'existe pas et f ne se prolonge pas en une fonction continue en 0.

b) Montrer que la fonction f admet une asymptote oblique en $+\infty$, donner l'équation de l'asymptote et la position du graphe de f par rapport à cette droite.

Au voisinage de 0, $sint=t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)$.

Donc quand $x\to+\infty$, on a :
$$f(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{6x^3}+o(\frac{1}{x^3})}$$

$$= \frac{x^3}{x^2 + \frac{1}{6} + o(1)}$$
$$= x\frac{1}{1 + \frac{1}{6x^2} + o(\frac{1}{x^2})}$$
$$= x(1 - \frac{1}{6x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$
$$= x - \frac{1}{6x} + o(\frac{1}{x}).$$

Donc $f(x) - x = o(1)$ et la droite d'équation $y = x$ est une symptote du graphe de f au voisinage de $+\infty$.

Comme $f(x) - x \sim -\frac{1}{6x}$ en $+\infty$, comme $-\frac{1}{6x} < 0$ (au voisinage de $+\infty$), le graphe de f est sous l'asymptote au voisinage de $+\infty$.